EPFL – Section de mathématiques
EGG – Ergodic and Geometric Group Theory
FACULTÉ DES SCIENCES DE BASE

Groupes localement compacts sans petits sous-groupes

Can Köker

Projet de Master
Année académique 2009–2010

Sous la direction du professeur Nicolas Monod

Lausanne

15 janvier 2010

revu et corrigé en mai 2010

En fait, on est plus créatif lorsqu'on ne fait rien. Je veux dire, lorsqu'on fait autre chose que des maths. Des promenades, par exemple. Il faut accepter de perdre son temps pour se construire une image mentale du problème.

ALAIN CONNES [1]

Remerciements

Je remercie le professeur Nicolas Monod pour avoir accepté de superviser ce travail de fin d'étude et de m'avoir proposé un sujet correspondant parfaitement à mes goûts mathématiques. Il a su répondre à toutes mes sollicitations avec toute la promptitude et la précision à laquelle je m'attendais et sans jugement malgré certaines questions naïves. Ses enseignements riches et variés ont bien élargit mon regard sur les mathématiques.

Je ne saurai conclure ce travail et achever par la même mon cursus universitaire sans témoigner de ma profonde gratitude envers les personnes qui m'ont accompagné ces dernières années passées à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne et même avant : enseignant-e-s du collège Rousseau à Genève, puis tous les membres du corps enseignant de l'EPFL, maîtres d'enseignement et de recherche, professeurs, mais également assistants-étudiants ou doctorants, secrétaires et bibliothécaires, toutes et tous ont su répondre à mes attentes avec professionnalisme.

En plus de ma famille et de mes amis proches, je remercie finalement l'ensemble de mes camarades d'études et autre personnes qui m'ont consacré du temps, offert leur soutien et leur aide lorsque j'en ai eu besoin.

Préface à la seconde édition

Des fautes typographiques ainsi que des erreurs mathématiques mineures ont été corrigées.

Table de matière

1 Introduction

Définition 1.1 Un groupe topologique est un groupe munit d'une structure d'espace topologique séparé (T_2) tel que les opérations du groupe $(x, y) \mapsto xy$ et $x \mapsto x^{-1}$ groupes sont continues sur $G \times G$ et G respectivement.

Nous omettons la mention *topologique et* T_2 en partant du principe que tous les groupes considérés sont de ce type.

Définition 1.2 i) Un espace topologique est dit localement euclidien si pour tout point de cet espace, il existe un entier $n \geq 0$ et V un voisinage de ce point tels que V est homéomorphe à une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

ii) Un espace topologique est dit localement compact si chacun de ses point admet un voisinage compact.

Définition 1.3 Soit G un groupe topologique. On dit que G admet des petits sous-groupes si pour tout voisinage V de l'identité il existe un sous-groupe $H \leqslant G$ qui dépend de V tel que $\{e\} \neq H \subseteq V$.

De manière équivalente, le groupe n'admet pas de petits sous-groupes si G admet un voisinage de l'identité qui ne contient aucun sous-groupe propre différent de $\{e\}$. Dans ce cas, on dit que le groupe satisfait à la propriété NSS (*no small subgroup*[1]) pour se conformer à la terminologie anglophone.

1.1 Sur le $\mathrm{V}^{\text{ème}}$ *problème de* Hilbert [11]

Dans la théorie qui porte son nom, Lie a étudié l'action de groupes sur les variétés différentiables. La manipulation des fonctions coordonnées dans ce cadre a conduit à munir certains groupes de structures additionnelles (aujourd'hui, on parle de structure topologique, différentiable etc). Lie a toujours fait l'hypothèse que les fonctions coordonnées utilisées étaient différentiables ou analytiques. Hilbert s'est interrogé sur la nature superflue de cette hypothèse. En 1900, il a présenté à Paris une série de 23 problèmes non-résolus lors du deuxième Congrès international des mathématiques [4]. Le cinquième de ces problèmes pourrait être reformulé dans sa forme *non-restreinte* dans un langage moderne comme suit. Étant donné un groupe G localement euclidien agissant continument sur une variété topologique M, existe-t-il des systèmes de coordonnées sur G et M tels que les opérations de groupe et l'action de G sur M soient différentiables ? La réponse à cette question s'est avérée négative comme l'ont montré certains contre-exemples dans les années qui ont suivi.

L'interprétation du problème a évolué grâce à des avancées significatives vers une forme *restreinte* du problème : le cas où $M = G$. Un groupe localement euclidien est-il un groupe de Lie ? La réponse s'est révelée être positive. La démonstration est indirecte et repose sur une propriété commune aux groupes localement euclidiens et aux groupes de Lie : c'est l'absence de petit sous-groupe (NSS).

Il était connu relativement tôt qu'un groupe de Lie satisfait la propriété NSS. Une preuve se trouve dans l'annexe. Naturellement, un groupe de Lie est un groupe localement euclidien puisqu'il ne s'agit que de la structure topologique sous-jacente. La résolution du problème à donc finalement conduit à montrer les implications de gauche à droite :

$$\text{localement euclidien} \quad \Leftrightarrow \quad \text{NSS localement compact} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Lie.}$$

Montgomery et Zippin [8] ainsi que Gleason [2] peuvent être considérés comme ceux ayant résolu le problème en démontrant, à quelques raffinements près, respectivement la première et la seconde implication de gauche à droite ci-dessus.

1.2 Structure du texte

Dans ce travail, nous suivons en très grande partie le texte de Kaplansky [6] pour montrer l'implication NSS $\Rightarrow$ localement euclidien. En partant d'un groupe localement compact NSS, nous lui associons un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et montrons qu'il est de dimension finie. En faisant correspondre homéomorphiquement un voisinage de 0 de cet espace avec un voisinage de l'identité du groupe, on montre que le groupe est localement euclidien.

Certains résultats classiques de topologie de générale ou d'analyse fonctionnelle sont soit énoncés sans démonstration dans le texte, soit démontrés dans l'annexe.

1. Le terme aurait été introduit par Gleason.

Les résultats principaux sont de nature purement topologique. Cependant, les outils qui servent à les démontrer ont un lien étroit avec la connaissance des groupes de Lie, et en particulier de leur algèbre de Lie.

1.3 Terminologie, convention de notation

L'ensemble des entiers positifs $\{1, 2, 3, \dots\}$ est noté $\mathbb{N}$. On utilise un système de notation adapté aux nombreux procédés de sélection de sous-suites successives. Pour une seule sous-suite de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, on note en générale $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ ladite sous-suite. Sinon, on note $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(x_i)_{i\in I}$, $(x_i)_{i\in I'}$; où $\mathbb{N} \supseteq I \supseteq I'$ sont des sous-ensembles infinis munis de l'ordre induit par $\mathbb{N}$. Les limites respectives de ces suites sont notées

$$\lim_{i\to\infty} x_i \quad \text{ou} \quad \lim_{i\in\mathbb{N}} x_i, \quad \lim_{i\in I} x_i, \quad \lim_{i\in I'} x_i, \text{etc.}$$

L'ensemble des applications de X dans Y est noté Y^X.

2 Groupes topologiques

Pour la suite du paragraphe, G désigne un groupe topologique quelconque. L'élément neutre (ou l'identité) est noté e. Les applications de multiplication et d'inversion dans le groupe sont notées respectivement μ et ι.

Définition 2.1 Soient $V, W \subseteq G$ des sous-ensembles et $n \in \mathbb{N}$. Soient

$$VW = \{xy \,|\, x \in V, y \in W\}, \quad V^n = VV \cdots V \quad (n \text{ fois}), \quad \text{et} \quad V^{-1} = \{g^{-1} | \, g \in V\}.$$

Par convention, on pose $V^0 = \{e\}$ et $x^0 = e$ pour tout $x \in G$. L'ensemble V est dit symétrique si $V = V^{-1}$.

Les éléments de V^n ne sont pas nécessairement de la forme x^n où $x \in V$. L'intersection et l'union de parties symétriques est symétrique. Si V est symétrique, alors V^n l'est aussi.

Proposition 2.1 *i) Pour tout $a \in G$, l'application $G \to G : T_a(x) = ax$ est un homéomorphisme.*
ii) Pour tout $a \in G$ et tout ouvert $H \subseteq G$, aH et Ha sont ouverts dans G.

Démonstration. La seconde assertion en découle de la première; on ne montre que celle-ci. Soient $a, x \in G$ et soit V un voisinage de $T_a(x) = ax$ dans G. Par continuité, il existe V_1 un voisinage de (a, x) dans $G \times G$ avec $\mu(V_1) \subseteq V$. Il existe V_2 et V_3 des voisinages dans G de g et h respectivement tels que $V_2 \times V_3 \subseteq V_1$. Ainsi, $T_a(V_3) \subseteq V$, donc T_a est continue de G dans G pour tout $a \in G$. De plus, la fonction inverse est $T_{a^{-1}} = T_a^{-1}$ et est continue. □

Voisinages de l'identité et topologie du groupe

Proposition 2.2 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit V un voisinage de l'identité. Alors V contient W un voisinage symétrique de l'identité tel que $W^n \subseteq V$.*

Démonstration. Il suffit de montrer le cas $n = 2$. Il existe V_1 un voisinage de (e, e) dans $G \times G$ avec $\mu(V_1) \subseteq V$ par continuité du produit. Il existe V_2, V_3 des voisinages de e dans G avec $V_2 \times V_3 \subseteq V_1$. Alors $W = V_2 \cap V_2^{-1} \cap V_3 \cap V_3^{-1}$ est un voisinage symétrique de l'identité avec $W^2 \subseteq V$. □

Proposition 2.3 *Soit G un groupe topologique et $\mathscr{U}$ une base de voisinages ouverts de l'identité. Alors $\{xU \,|\, x \in G, U \in \mathscr{U}\}$ forme une base de topologie sur G et cette topologie coïncide avec celle de G. La même assertion est vérifiée pour $\{Ux \,|\, x \in G, U \in \mathscr{U}\}$.*

Démonstration. Soit $W \subseteq G$ un ouvert non-vide et soit $a \in W$. Alors $a^{-1}W$ est ouvert et contient l'identité. Il existe donc $U_a \in \mathscr{U}$ tel que $U_a \subseteq a^{-1}W$, ou encore $aU_a \subseteq W$. Donc $W = \bigcup_{a \in W} aU_a$ est ouvert. □

Homogénéité

Tout paire d'éléments du groupe peuvent être joint par une translation : pour tout $x, y \in G$, il existe $a \in G$ avec $ax = y$. La translation étant un homéomorphisme (proposition 2.1), la proposition précédente montre que toutes les propriétés des voisinages de n'importe quel point du groupe sont identiques à celles des voisinages de l'identité.

Compacité

Dans le cadre des espaces métriques, les notions de *compacité* et *compacité séquentielle* coïncident. Ainsi, nous ne distinguerons pas ces deux notions lorsque nous le pourrons et nous omettrons la mention *séquentielle.*

Arzéla-Ascoli

Nous utilisons la forme suivante du théorème Arzéla-Ascoli. Soit X un espace compact séparé et $\mathscr{C}(X)$ l'ensemble des fonctions continues à valeur réels sur X munit de la norme du supremum $\| \, \|_\infty$.

Théorème *Soit $C \subseteq \mathscr{C}(X)$ une famille uniformément bornée et équicontinue de fonction. Alors C est compact.*

2.1 Fonctions continues et uniformément continues

Dans ce paragraphe, G désigne un groupe topologique séparé.

Proposition 2.4 *Soient $A, B \subseteq G$ des parties compactes. Alors AB est compact.*

Démonstration. En tant que sous-espace topologique de $G \times G$, le sous-ensemble $A \times B$ est compact car le produit d'espaces compacts est compact (théorème de Tychonoff). Par continuité du produit, l'image $\mu(A \times B) = AB$ est compact dans G. □

Définition 2.2 Soient $x_0 \in G$ et $f \in \mathbb{R}^G$ une application. L'application f est dite continue à gauche (resp. à droite) en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe V un voisinage ouvert de l'identité dans G tel que $|f(zx) - f(x)| < \varepsilon$ (resp. $|f(xz) - f(x)| < \varepsilon$) pour tout $z \in V$.

Proposition 2.5 *Une application $f \in \mathbb{R}^G$ est continue en $x \in G$ si et seulement si f est continue à droite (ou à gauche) en x.*

Démonstration. Soit $f \in \mathbb{R}^G$ une fonction continue à droite et soit $\varepsilon > 0$. Il existe V un voisinage de l'identité tel que $|f(xz) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $z \in V$. L'ensemble $V_x = xVx^{-1}$ est un voisinage de l'identité par continuité du produit dans G. Pour tout $z \in V_x$, $|f(zx) - f(x)| < \varepsilon$. □

Définition 2.3
- i) Soit $f \in \mathbb{R}^G$. Le support de f est l'adhérence de $\{x \in G \,|\, f(x) \neq 0\}$ dans G et est noté $\operatorname{supp} f$.
- ii) Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^G$ des fonctions réelles continues sur G est noté $\mathscr{C}(G)$. Le sous-ensemble des fonctions à support compact est noté $\mathscr{C}_c(G)$.

Définition 2.4 Soit $f \in \mathbb{R}^G$.
- i) L'application f est dite uniformément continue à gauche (resp. à droite) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe V un voisinage de l'identité dans G tel que $|f(zx) - f(x)| < \varepsilon$ (resp. $|f(xz) - f(x)| < \varepsilon$) pour tout $z \in V$ et tout $x \in G$.
- ii) Une application f est dite uniformément continue si f est uniformément continue à gauche et à droite.

Proposition 2.6 *Soient G un groupe topologique localement compact et $f \in \mathscr{C}_c(G)$. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in G$, il existe $V(x)$ un voisinage ouvert de l'identité tel que $|f(zx) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $x \in G$, il existe $W(x)$ un voisinage ouvert de l'identité tel que $W(x)^2 \subseteq V(x)$. Alors

$$\operatorname{supp} f \subseteq \bigcup_{x \in \operatorname{supp} f} W(x)x$$

est un recouvrement du compact $\operatorname{supp} f$ par des ouverts. Donc, il existe un sous-recouvrement fini

$$\operatorname{supp} f \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} W(x_i)x_i.$$

Soient $V_1 = W(x_1) \cap W(x_2) \cap \cdots \cap W(x_N)$ et $V = V_1 \cap V_1^{-1}$. On vérifie que V convient. D'abord, V est un voisinage ouvert de l'identité. Soient $z \in V$ et $x \in G$.
- i) Si $x \notin \operatorname{supp} f$ et $zx \notin \operatorname{supp} f$, alors $|f(zx) - f(x)| = 0 < \varepsilon$.
- ii) Si $x \in \operatorname{supp} f$, alors $x = wx_i \in W(x_i)x_i$ pour un certain i et $w \in W(x_i)$. Donc

$$|f(zx) - f(x)| = |f(zwx_i) - f(wx_i)| \leq |f(zwx_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(wx_i)| < \varepsilon$$

car $zw \in VW(x_i) \subseteq W(x_i)^2 \subseteq V(x_i)$ et $w \in W(x_i)$.

iii) Si $zx \in \operatorname{supp} f$, alors $zx = wx_i$ pour un certain i et $w \in V$. Donc

$$|f(zx) - f(x)| = |f(wx_i) - f(z^{-1}wx_i)| \leq |f(wx_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(z^{-1}wx_i)| < \varepsilon$$

car $w \in W(x_i)$ et $zw \in V^{-1}W(x_i) = VW(x_i) \subseteq W(x_i)^2 \subseteq V(x_i)$.

En résumé, $|f(zx) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $z \in V$ et tout $x \in G$. Ceci montre que f est uniformément continue à gauche. L'autre cas (continuité uniforme à droite) s'obtient de la même manière. Donc, f est uniformément continue sur G. □

Proposition 2.7 *Soit G un groupe topologique et soit $f \in \mathbb{R}^G$ une application à support compact. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) f est continue sur G (resp. uniformément continue sur G),

ii) f est continue à droite sur G (resp. uniformément continue à droite sur G),

iii) f est continue à gauche sur G (resp. uniformément continue à gauche sur G).

Démonstration. Il suffit de montrer ii)⇒iii) Soit $f \in \mathbb{R}^G$ continue à droite sur G. Soient $x \in G$ et $\varepsilon > 0$. Il existe W_ε un voisinage de l'identité tel que $|f(xw) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $w \in W_\varepsilon$. Soit $V_{\varepsilon,x} = xW_\varepsilon x^{-1}$. Alors $V_{\varepsilon,x}$ est un voisinage de l'identité et pour tout $z \in V_{\varepsilon,x}$, on a $z = xwx^{-1}$ avec $w \in W_\varepsilon$ et donc

$$|f(zx) - f(x)| = |f(xw) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ceci montre que f est continue à gauche en $x \in G$ et par suite f est continue à gauche sur G. Et donc f est continue sur G.

Si de plus, f est uniformément continue à droite, f est uniformément continue sur G par la proposition précédente. □

Proposition 2.8 *Soient G et H des groupes topologiques et $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes. Les assertions suivantes sont équivalentes : i) f est continue sur G, ii) f est continue un seul point de G.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si f est continue en e_G, alors f est continue sur G. Soit $x \in G$ et V un voisinage de $f(x)$ dans H. Alors, $f(x)^{-1}V$ est un voisinage de $e_H \in H$. Par hypothèse, il existe V_1 un voisinage de $e_G \in G$ avec $f(V_1) \subseteq f(x)^{-1}V$. Ainsi, xV_1 est un voisinage de x dans G et donc $f(xV_1) = f(x)f(V_1) \subseteq f(x)f(x)^{-1}V = V$. □

Proposition 2.9 *Soient $K \subseteq X$ un sous-sous-ensemble d'un espace topologique X, $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{C}(X)$ et $g \in \mathscr{C}(X)$ tel que $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers g. Si $\operatorname{supp} f_i \subseteq K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors $\operatorname{supp} g \subseteq K$.*

Démonstration. Soit $x \in \operatorname{supp} g$. Il suffit de montrer que $x \in \operatorname{supp} f_i$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$. Soit V un voisinage de x dans X. Il existe $y \in V$ tel que $|g(y)| > 0$. Puisque $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers g ponctuellement, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $|f_j(y) - g(y)| < |g(y)|$. Alors $-|g(y)| < -|f_j(y) - g(y)|$ et donc

$$0 < |g(y)| - |f_j(y) - g(y)| \leq ||g(y)| - |f_j(y) - g(y)|| \leq |g(y) - (g(y) - f_j(y))| = |f_j(y)|\,.$$

Ainsi $x \in \operatorname{supp} f_j$. □

2.2 Espace $(\mathscr{C}_c(G), \|\ \|)$

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^G$ de la structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathscr{C}(G), \mathscr{C}_c(G)$ de la structure de sous-espace. Soit

$$\|f\| = \sup_{x\in G} |f(x)| \quad \text{pour tout } f \in \mathscr{C}(G).$$

Il est clair que

$$\|f\| = \sup_{x\in G} |f(yx)| = \sup_{x\in G} |f(xy)| \quad \text{pour tout } y \in G.$$

Ainsi, $\mathscr{C}(G)$ est munit d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Sans mention explicite du contraire, nous ferons toujours référence à la topologie associée à cette norme. L'ensemble $\mathscr{C}_c(G)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(G)$. Plus précisément, si $f, g \in \mathscr{C}_c(G)$, alors $\operatorname{supp}(f+g) \subseteq \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$.

Définition 2.5 Soient G un groupe topologique, $a \in G$ et $f \in \mathbb{R}^G$ une application. Soit $a.f : x \mapsto f(a^{-1}x)$ pour tout $x \in G$. Quelques fois, on notera $a.f = af$.

L'application $G \times \mathbb{R}^G \to \mathbb{R}^G : (a, f) \mapsto a.f$ est une action à gauche de G sur $\mathbb{R}^G$. Elle induit une action de G sur $\mathscr{C}(G)$ et sur $\mathscr{C}_c(G)$. Plus précisément, si $\operatorname{supp} f \subseteq W$, alors $\operatorname{supp} a.f \subseteq aW$ pour tout $a \in G$.

Proposition 2.10 *Soient G un groupe localement compact et métrisable. L'espace $G \times \mathscr{C}_c(G)$ est munit de la topologie produit. Alors l'application $G \times \mathscr{C}_c(G) \to \mathscr{C}_c(G)$ définie par $(a, f) \mapsto a.f$ est continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et soient $a \in G$ et $f \in \mathscr{C}_c(G)$. Il faut montrer qu'il existe V un voisinage de (a, f) dans $G \times \mathscr{C}_c(G)$ tel que $\|b.g - a.f\| < \varepsilon$ pour tout $(b, g) \in V$. Il suffit de montrer qu'il existe V_1 un voisinage de $a \in G$ et V_2 un voisinage de $f \in \mathscr{C}_c(G)$ tel que $b \in V_1$ et $g \in V_2$ impliquent $\|b.g - a.f\| < \varepsilon$.

Soit ε_1 un nombre réel avec $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Puisque $g \in \{\phi \in \mathscr{C}_c(G) \mid \|f - \phi\| < \varepsilon - \varepsilon_1\}$ implique

$$\|b.g - a.f\| \leq \|b.g - b.f\| + \|b.f - a.f\| = \|g - f\| + \|f - b^{-1}a.f\| < \varepsilon - \varepsilon_1 + \|f - b^{-1}a.f\|,$$

il suffit de montrer qu'il existe un voisinage symétrique V_3 de l'identité tel que $\|f - c.f\| < \varepsilon_1$ pour $c \in V_3$ et de considérer $V_1 = aV_3$. En effet, dans ce cas, $b \in aV_3$ implique $b^{-1}a = (a^{-1}b)^{-1} \in V_3^{-1} = V_3$ et donc $\|f - b^{-1}a.f\| < \varepsilon_1$. Or, f est uniformément continue (à gauche en particulier), il existe donc W un voisinage de l'identité tel que

$$|f(zx) - f(x)| < \varepsilon_1 \qquad \text{pour tout } z \in W \text{ et tout } x \in G.$$

Soit $V_3 = W \cap W^{-1}$. Alors $c \in V_3$ implique $c^{-1} \in V_3$ et donc $|f(x) - c.f(x)| = |f(x) - f(c^{-1}x)| < \varepsilon_1$. □

2.3 Mesure de HAAR

Le but de ce paragraphe est de présenter de manière consise les notions requises pour la suite du de l'exposé concernant la théorie de l'intégration sur les groupes localement compacts. Un traité classique en la matière est [3, chap. 3].

Soit G un groupe localement compact séparée et à base dénombrable et soit $\mathscr{C}_c^+(G)$ le sous-ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}_c(G)$ avec $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in G$. Il existe une fonction $L : \mathscr{C}_c^+(G) \to [0, \infty)$ telle que

i) $L(f + g) = L(f) + L(g)$ et $L(\lambda f) = \lambda L(f)$ pour tout $f, g \in \mathscr{C}_c^+(G)$ et tout $\lambda \in (0, \infty)$.
ii) $L(f) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $f(x) = 0$ pour tout $x \in G$.
iii) (propriété d'invariance à gauche) $L(af) = L(f)$ pour tout $a \in G$.

On note

$$L(f) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pour tout } f \in \mathscr{C}_c^+(G).$$

S'il existe un autre application $L' : \mathscr{C}_c^+(G) \to [0, \infty)$ satisfaisant aux mêmes conditions, alors $L = \lambda L'$ pour un nombre réel $\lambda > 0$.

Soit B une partie borélienne non-vide de B. Alors il existe une suite de fonctions $(f_i)_{i \in N}$ de $\mathscr{C}_c^+(G)$ telle que

$$\lim_{i \to \infty} f_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \notin B. \end{cases}$$

Soit

$$m(B) = \lim_{i \to \infty} L(f_i).$$

On admet que $m(B) \in [0, \infty] \cup \{\infty\}$. Si U est est ouvert et non-vide, alors $m(U) > 0$.

Pour tout $f \in \mathscr{C}_c(G)$, soit

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int f^-(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{où} \quad \begin{cases} f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \\ f^-(x) = \min\{-f(x), 0\}. \end{cases}$$

3 Groupes NSS

3.1 Métrisabilité

Pour la suite de l'exposé, il est crucial que le groupe considéré soit métrisable pour pouvoir employer des arguments de compacité. Le résultat classique suivant ([3, (8.2)]) donne un critère suffisant pour que le groupe soit métrisable. Le théorème 3.2 [9, Lemme 1] montre que ce critère est satisfait pour des groupes sans petit sous-groupes (NSS).

On rappelle que G est NSS s'il existe un voisinage de l'identité qui ne contient aucun sous-groupe propre différent de $\{e\}$.

Théorème 3.1 *Soit G un groupe topologique séparé. Soit $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de G telle que les conditions suivantes sont satisfaites :*

a) $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de voisinages symétriques de l'identité

b) $\bigcap_k U_k = \{e\}$

c) $U_{k+1}^2 \subseteq U_k$ pour tout k.

Alors il existe une application $\sigma : G\times G \to \mathbb{R}$ associée à $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui satisfait aux conditions suivantes :

1. *σ est bi-invariante à gauche par G. Autrement dit, $\sigma(ax, ay) = \sigma(x, y)$ pour tout $a, x, y \in G$.*
2. *σ est une métrique sur G.*
3. *$\sigma(x, y) \le 2^{-k+2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x, y \in G$ avec $y^{-1}x \in U_k$.*
4. *$2^{-k} \le \sigma(x, y)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x, y \in G$ avec $y^{-1}x \notin U_k$.*

Si de plus, $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ forme une base de voisinages de l'identité, alors :

5. *la topologie engendrée par la métrique σ coïncide avec la topologie du groupe.*

Démonstration. Par convenance, la notation $V_{2^{-k}} = U_k$ est adoptée. La relation d'inclusion s'écrit

$$V^2_{2^{-(k+1)}} = V^2_{2^{-k-1}} \subseteq V_{2^{-k}} \quad \text{ou encore} \quad V^2_{2^{-k}} \subseteq V_{2^{-(k-1)}} = V_{2^{-k+1}}.$$

Soit $V_r = G$ pour tout $r \ge 1$. On définit V_r pour r de la forme :

$$r = 2^{-l_1} + 2^{-l_2} + \cdots + 2^{-l_n}, \quad \text{avec } l_1 < l_2 < \cdots < l_n \text{ des entiers positifs.}$$

Soit $V_r = V_{2^{-l_1}} V_{2^{-l_2}} \cdots V_{2^{-l_n}}$.

I. 1) *Assertion :*

$$V_r \subseteq V_s \text{ pour tout } r < s \text{ comme ci-dessus.} \tag{1}$$

Pour $s \ge 1$, l'assertion est vraie car $V_s = G$. Soit donc $s = 2^{-m_1} + 2^{-m_2} + \cdots + 2^{-m_p}$ avec $0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_p$ entiers positifs. Il existe un indice k pour lequel $l_k > m_k$ et $l_i = m_i$ pour tout $i < k$. Soit $W = V_{2^{-l_1}} \cdots V_{2^{-l_{k-1}}}$. Alors

$$\begin{aligned}
V_r &= WV_{2^{-l_k}} \cdots V_{2^{-l_{n-2}}} V_{2^{-l_{n-1}}} V_{2^{-l_n}} \subseteq WV_{2^{-l_k}} \cdots V_{2^{-l_{n-2}}} V_{2^{-l_{n-1}}} V^2_{2^{-l_n}} \\
&\subseteq WV_{2^{-l_k}} \cdots V_{2^{-l_{n-2}}} V_{2^{-l_{n-1}}} V_{2^{-(l_n-1)}} \subseteq WV_{2^{-l_k}} \cdots V_{2^{-l_{n-2}}} V_{2^{-l_{n-1}}} V^2_{2^{-(l_n-1)}} \\
&\subseteq \cdots \subseteq WV_{2^{-l_k}} \cdots V_{2^{-l_{n-2}}} V_{2^{-l_{n-1}}} V_{2^{-(l_n-(l_n-l_{n-1}))}} = WV_{2^{-l_k}} \cdots V_{2^{-l_{n-2}}} V_{2^{-l_{n-1}}} \\
&\subseteq \cdots \subseteq WV^2_{2^{-l_k}} = WV_{2^{-l_k+1}} \subseteq WV^2_{2^{-l_k+1}} \subseteq \cdots \subseteq WV_{2^{-l_k+(l_k-m_k)}} = WV_{2^{-m_k}} \\
&= V_{2^{-l_1}} \cdots V_{2^{-l_{k-1}}} V_{2^{-m_k}} \subseteq V_{2^{-l_1}} \cdots V_{2^{-l_{k-1}}} V_{2^{-m_k}} V_{2^{-m_{k+1}}} \cdots V_{2^{-m_p}} \\
&= V_{2^{-m_1}} \cdots V_{2^{-m_{k-1}}} V_{2^{-m_k}} V_{2^{-m_{k+1}}} \cdots V_{2^{-m_p}} = V_s.
\end{aligned}$$

2) *Assertion :*

$$V_r V_{2^{-l}} \subseteq V_{r+2^{-l+2}} \quad \text{pour tout entier positif } l. \tag{2}$$

– Si $r + 2^{-l+2} \ge 1$, alors la conclusion est immédiate car $V_{r+2^{-l+2}} = G$.

– Si $l > l_n$, l'inclusion (1) entraîne

$$V_r V_{2^{-l}} = V_{r+2^{-l}} \subseteq V_{r+2^{-l+2}}. \tag{3}$$

– Si $l \leq l_n$, soit k l'unique indice qui satisfait à $l_{k-1} < l \leq l_k$ (où $l_0 = 0$). Soient encore $r_1 = 2^{-l+1} - 2^{-l_k} - 2^{-l_{k+1}} - \cdots - 2^{-l_n}$ et $r_2 = r + r_1$. Alors

$$r = r_2 - r_1 < r_2 < r + 2^{-l+1}.$$

Cette relation et ainsi que (1) montrent que

$$V_r V_{2^{-l}} \subseteq V_{r_2} V_{2^{-l}} = V_{r_2 + 2^{-l}} = V_{r+2^{-l+1}+2^{-l}} = V_{r+3\cdot 2^{-l+1}} \subseteq V_{r+2^{-l+2}}.$$

Ceci démontre (2).

II. Soit $\varphi(g) = \inf\{r > 0 \,|\, g \in V_r\}$ $(g \in G)$.

1) *Assertion : $\varphi(g) = 0$ si et seulement si $g = e$.* En effet, soit $g = e$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ avec $0 < 2^{-n_\varepsilon} < \varepsilon$. Donc $g \in V_{2^{-n_\varepsilon}}$. Par suite $\varphi(g) = 0$. Réciproquement, supposons $\varphi(g) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(g) < 2^{-n}$. Donc $g \in \bigcap_n V_{2^{-n}} = \bigcap_n U_n = \{e\}$.

2) Soit
$$\sigma(x, y) = \sup\{\, |\varphi(zx) - \varphi(zy)| \,|\, z \in G\} \qquad \text{pour tout } x, y \in G.$$
Clairement, σ satisfait la condition 1 du théorème.

3) On a $\sigma(x, y) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = y$. En effet, $\sigma(x, y) = \sigma(y^{-1}x, e) = 0$ implique $\left|\varphi(y^{-1}x) - \varphi(e)\right| = \varphi(y^{-1}x) = 0$ et donc $x = y$ par le point précédent. De plus, $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ et $\sigma(x, z) \leq \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$. Ceci démontre la condition 2 du théorème.

III. *Assertion : $y^{-1}x \in U_k \Rightarrow \sigma(x, y) \leq 2^{-k+2}$.* Soient $z \in G$, $u = y^{-1}x$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $u \in U_k = V_{2^{-k}}$.

1) Si r est tel que $z \in V_r$, alors $zu \in V_r V_{2^{-k}} \subseteq V_{r+2^{-k+2}}$ par (2). Donc

$$\{s \,|\, z \in V_s\} \subseteq \{s \,|\, zu \in V_{s+2^{-k+2}}\}.$$

Il s'ensuit que

$$\varphi(z) = \inf\{s \,|\, z \in V_s\} \geq \inf\{s \,|\, zu \in V_{s+2^{-k+2}}\} = \inf\{s \,|\, zu \in V_s\} - 2^{-k+2} = \varphi(zu) - 2^{-k+2}.$$

Ainsi $\varphi(zu) - \varphi(z) \leq 2^{-k+2}$.

2) Si r est tel que $zu \in V_r$, alors $z \in V_r V_{2^{-k}}^{-1} = V_r V_{2^{-k}} \subseteq V_{r+2^{-k+2}}$. Donc

$$\{s \,|\, zu \in V_s\} \subseteq \{s \,|\, z \in V_{s+2^{-k+2}}\}.$$

Il s'ensuit que

$$\varphi(zu) = \inf\{s \,|\, zu \in V_s\} \geq \inf\{s \,|\, z \in V_{s+2^{-k+2}}\} = \inf\{s \,|\, z \in V_s\} - 2^{-k+2} = \varphi(z) - 2^{-k+2}.$$

Ainsi $\varphi(z) - \varphi(zu) \leq 2^{-k+2}$.

Donc $\left|\varphi(zu) - \varphi(u)\right| \leq 2^{-k+2}$. Puisque $z \in G$ a été choisit arbitrairement, il s'ensuit que

$$\sigma(x, y) = \sup\{|\varphi(zx) - \varphi(zy)| \,|\, z \in G\} = \sup\{|\varphi(z) - \varphi(zy^{-1}x)| \,|\, z \in G\} \leq 2^{-k+2}.$$

Ceci démontre le point 3 du théorème.

IV. *Assertion : $y^{-1}x \notin U_k \Rightarrow \sigma(x, y) \geq 2^{-k}$.* La condition $y^{-1}x \notin V_{2^{-k}}$ implique $\varphi(y^{-1}x) \geq 2^{-k}$. En particulier,
$$\sigma(x, y) = \sigma(y^{-1}x, e) \geq |\varphi(y^{-1}x) - \varphi(ee)| \geq 2^{-k}.$$
La condition 4 du théorème est ainsi démontrée.

V. Supposons que la famille $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base dénombrable de voisinages de l'identité. Il faut montrer que la topologie engendrée par σ, notée $\mathcal{O}$, coïncide avec la topologie de G. Pour cela, il suffit de considérer les boules ouvertes (car elles constituent une sous-base de $\mathcal{O}$) ainsi que les U_k (qui, une fois translatés, engendrent la topologie de G).

Or, les conditions 3 et 4 montrent précisément l'équivalence des deux topologies :

$$\{x \in G \,|\, \sigma(x, e) < 2^{-k}\} \subseteq U_k \subseteq \{x \in G \,|\, \sigma(x, e) < 2^{-k+2}\} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Théorème 3.2 *Soit G un groupe topologique* NSS*. Alors G est métrisable.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $V \subset G$ un voisinage symétrique de l'identité qui n'admet aucun sous-groupe différent de $\{e\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient $W_n = \{x \in G \mid x^n \in V\}$ et $V_n = W_1 \cap \cdots \cap W_n$. Puisque V est symétrique, les W_n et V_n le sont aussi.

Les V_n forment une base de voisinages symétriques et décroissante de l'identité. En effet, soit $f_n(x) = x^n$. Alors f_n est continue. D'une part, $e^n = e \in V$. D'autre part, si $V' \subseteq V$ est un voisinage ouvert de l'identité, alors $f_n^{-1}(V')$ est aussi ouvert

$$f_n^{-1}(V') \subseteq f_n^{-1}(V) = \{x \in G \mid f(x) \in V\} = W_n.$$

Il s'ensuit que les W_n, et donc les V_n, sont des voisinages de l'identité. Clairement, $\bigcap_n V_n = \{e\}$. Sinon, l'intersection contiendrait un élément $x \neq e$ et le voisinage V contiendrait le groupe cyclique engendré par x, ce qui est une contradiction.

Soit $U_1 = V_1$. Il existe U_2' un voisinage de symétrique l'identité avec $U_2'^2 \subseteq U_1$. On a $U_2^2 \subseteq U_2'^2 \subseteq U_1$. Soit $U_2 = U_2' \cap V_1$. Il existe U_3' un voisinage symétrique de l'identité avec $U_3'^2 \subseteq U_2$. Soit $U_3 = U_3' \cap V_3$, etc. Ceci détermine une famille voisinages symétriques de l'identité $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $U_{n+1}^2 \subseteq U_n$ et $\bigcap_n U_n = \{e\}$. Par le théorème précédent, G est métrisable. □

Ce résultat démontre que tout groupe NSS est à base dénombrable. Par la suite, cette propriété sera utilisée sans être explicitement mentionnée.

3.2 Vers l'existence d'un sous-groupe à un paramètre

Définition 3.1 Soit G un groupe topologique.

(a) Un sous-groupe à un paramètre de G est un homomorphisme continu de $(\mathbb{R},+)$ dans G.

(b) Le sous-groupe à un paramètre trivial $\mathbb{R} \to G : r \mapsto e$ est noté $\mathbf{0}$.

(c) L'ensemble des sous-groupes à un paramètre de G et noté $\mathrm{L}(G)$ ou simplement L.

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer quelles conditions sur le groupe implique l'existence d'un sous-groupe à un paramètre non trivial.

Voisinage canonique, racine carrée

Théorème 3.3 *Soit G un groupe localement compact* NSS*. Alors G admet un voisinage de l'identité U tel que l'application $x \mapsto x^2$ restreinte à U est injective.*

Démonstration. Par l'absurde, on suppose que pour tout voisinage symétrique de l'identité U, il existe $x, y \in U$ avec $x^2 = y^2$ et $x \neq y$. Par hypothèse sur G, il existe W un voisinage compact de l'identité qui ne contient aucun sous-groupe différent de $\{e\}$. Soit $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable de voisinages symétriques de l'identité. Soient $U_1 = V_1 \cap W$ et $U_i = U_{i-1} \cap V_i \cap W$ pour tout $i \geq 2$. Alors $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de voisinages symétriques de l'identité contenue dans W. Par hypothèse absurde, il existe deux suites $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que $x_i, y_i \in U_i$, $x_i^2 = y_i^2$ et $x_i \neq y_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, ces suites convergent vers l'identité.

Soit $a_i = x_i y_i^{-1}$. Alors $a_i \neq e$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} x_i y_i^{-1} = \left(\lim_{i\to\infty} x_i\right)\left(\lim_{i\to\infty} y_i\right)^{-1} = ee = e.$$

Par ailleurs, il découle des définitions que $y_i^{-1} a_i y_i = y_i^{-1} x_i y_i^{-1} y_i = y_i^{-1} x_i = a_i^{-1}$ et donc

$$y_i^{-1} a_i^k y_i = a_i^{-k} \quad \text{pour tout entier positif } k. \tag{4}$$

Pour chaque entier i fixé, W ne contient pas tous les éléments de la suite $(a_i, a_i^2, a_i^3, \ldots)$. Dans le cas contraire, W contiendrait le sous-groupe engendré par a_i. Ainsi, il existe un unique indice $m_i \in \mathbb{N}$ tel que $\{a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{m_i}\} \subseteq W$ et $a_i^{m_i+1} \notin W$. La suite $(a_i^{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$ étant entièrement contenue dans le compact W, elle admet une sous-suite $(a_i^{m_i})_{i\in I}$ qui converge vers un élément $b \in W$.

Par choix de l'indice m_i, la suite auxiliaire $(a_i^{m_i+1})_{i\in I}$ est contenue dans le complémentaire de W dans G et converge également vers b car

$$\lim_{i\in I} a_i^{m_i+1} = \left(\lim_{i\in I} a_i\right)\left(\lim_{i\in I} a_i^{m_i}\right) = eb = b.$$

Ainsi b appartient au bord de W. Puisque W est un voisinage de l'identité, il s'ensuit que $b \neq e$. Par (4),

$$b^{-1} = \lim_{i \in I} a_i^{-m_i} = \lim_{i \in I} y_i^{-1} a_i^{m_i} y_i = ebe = b.$$

Donc $b^2 = e$. Or $\{e, b\}$ forme un sous-groupe différent de $\{e\}$ et contenu dans W, ce qui est une contradiction et démontre ainsi le théorème. $\square$

Définition 3.2 Soit G un groupe topologique et soit U un voisinage symétrique de l'identité. On dit que U est un voisinage canonique si U ne contient aucun sous-groupe différent de $\{e\}$ et si pour tout $x, y \in U$ avec $x^2 = y^2$, on a $x = y$ (autrement dit, l'application $x \mapsto x^2$ est injective sur U).

Théorème 3.4 *Soit G un groupe localement compact* NSS*. Alors G admet un voisinage canonique.*

Démonstration. Il existe V_1 un voisinage compact de l'identité qui n'admet aucun sous-groupe différent de $\{e\}$. Par le théorème 3.3, il existe V_2 un voisinage de l'identité tel que l'application $x \mapsto x^2$ y est injective. Alors $V_1 \cap V_1^{-1} \cap V_2 \cap V_2^{-1}$ est un voisinage canonique. $\square$

Le résultat suivant est un critère de convergence de suite adapté au cadre de ce travail. On note $I \dot{\subseteq} \mathbb{N}$ si I est infini.

Proposition 3.5 *Soient X un espace topologique séparé et $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de X. Alors*

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists\, x \in X,\ \forall\, I \dot{\subseteq} \mathbb{N},\ \exists\, I' \dot{\subseteq} I \quad \lim_{i \in I'} x_i = x.$$

Démonstration. Le sens « $\Rightarrow$ » est immédiat. On montre que si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ diverge, alors

$$\forall\, x \in X,\ \exists\, I \dot{\subseteq} \mathbb{N},\ \forall\, I' \dot{\subseteq} I \quad \lim_{i \in I'} x_i \neq x,$$

c'est-à-dire qu'il existe V_x un voisinage de x tel que $x_i \notin V_x$ pour tout $i \in I'$. Soit $x \in X$. Vu que $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ diverge, il existe V_x un voisinage de x tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $n_i \geq i$ avec $x_{n_i} \notin V_x$. Soit $I = \{n_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$. Alors pour tout $I' \dot{\subseteq} I$, $x_j \notin V_x$ pour tout $j \in I'$. $\square$

Remarque 3.3 La proposition précédente sera employée de la façon suivante. Pour montrer qu'une suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge, on considère deux sous-suites quelconques $(x_i)_{i \in I}$ et $(x_i)_{i \in J}$, on montre qu'elles admettent des sous-suites convergentes et que les limites de ces dernières sont égales, c'est-à-dire que la limite ne dépendent pas de du choix de $I, J \dot{\subseteq} \mathbb{N}$.

Soit x un nombre réel. Il existe un unique entier $[x] \in \mathbb{Z}$, qui satisfait à $[x] \leq x < [x] + 1$. Pour cet exposé, seul le cas $x \geq 0$ sera utilisé. Il serait possible de réduire sensiblement certains raisonnement ultérieurs en exigeant que $|[x]| \leq x$, mais nous n'adoptons pas cette définition.

Théorème 3.6 *Soient G un groupe localement compact* NSS *et U un voisinage canonique. Soient $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de G et $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres entiers positifs tels que*

$$\{a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{m_i}\} \subseteq U \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}.$$

Soit V un voisinage de l'identité. Alors il existe un nombre réel positif r_0 associé à V tel que

$$a_i^{[rm_i]} \in V \qquad \text{pour tout } r \text{ avec } 0 \leq r < r_0 \text{ et tout } i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout r avec $0 \leq r < r_0$, il existe un indice $i \in \mathbb{N}$ avec $a_i^{[rm_i]} \notin V$. Soit $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels convergente vers 0 telle que $0 \leq r_i < \min\{1, r_0\}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe un indice $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_i}^{[r_i m_{n_i}]} \notin V$. Alors $[r_i m_{n_i}] \leq r_i m_{n_i} < m_{n_i}$. Vu que $a_{n_i}^{[r_i m_{n_i}]} \in \{a_i, \ldots, a_i^{m_i}\} \subseteq U$ et que U est compact, il s'ensuit que la suite $(a_{n_i}^{[r_i m_{n_i}]})_{i \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. Soit $(a_{n_i}^{[rm_{n_i}]})_{i \in I}$ cette sous-suite et soit b sa limite.

Aucun terme de cette suite n'est dans V qui est un voisinage de e, donc $b \neq e$. Soit p un entier positif. Alors

$$b^p = \left(\lim_{i\in I} a_{n_i}^{[r_i m_{n_i}]}\right)^p = \lim_{i\in I} a_{n_i}^{p[r_i m_{n_i}]}.$$

Par construction, il existe un indice $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $pr_i < 1$ pour tout $i \geq i_0$. Alors $p[r_i m_{n_i}] \leq pr_i m_{n_i} \leq m_{n_i}$ pour tout $i \geq i_0$. Il s'ensuit que $a_{n_i}^{p[r_i m_{n_i}]} \in U$ pour tout $i \in I$ avec $i \geq i_0$. Ainsi, b^p est un élément de U. Mais $b^{-p} \in U$ également puisque U est symétrique. Par suite, U contient le sous-groupe cyclique engendré par b, ce qui est une contradiction. □

Soient x et y des nombres réels. Alors $[x+y]$ et $[x]+[y]$ diffèrent d'un nombre au plus égale à un. En effet, $0 \leq x-[x] < 1$ et $0 \leq y-[y] < 1$ impliquent $-1 \leq x+y-1-[x]-[y] < 1$. Si $x+y-1-[x]-[y] < 0$, alors $[x+y] = [x]+[y]$. Sinon, $[x+y] = [x]+[y]+1$.

Lemme 3.7 *Soient G un groupe topologique, $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de G convergeante vers l'identité et $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs. Si $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la suite $(a_i^{\alpha_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers l'identité.*

Démonstration. Soit V un voisinage de l'identité et soit r un entier tel que $|\alpha_i| \leq r$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Il existe V_1 un voisinage de l'identité tel que $V_1^r \subseteq V$. En particulier $V_1^d \subseteq V$ pour tout $|d| \leq r$. Il existe un indice $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_i \in V_r$ pour tout $i \geq i_0$. Mais alors, $a_i^{\alpha_i} \in V_1^{\alpha_i} \subseteq V_1^r \subseteq V$ pour tout $i \geq i_0$. Ceci démontre le lemme. □

Lemme 3.8 *Soient $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de G convergente vers l'identité, $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $r, s \geq 0$ des nombres réels. Si $(a_i^{[rm_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ et $(a_i^{[sm_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ convergent vers b et c respectivement, alors $(a_i^{[(r+s)m_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers bc.*

Démonstration. Puisque $[(r+s)m_i] = [rm_i]+[sm_i]+\alpha_i$ avec $\alpha_i \in \{0,1\}$, le lemme précédent implique

$$\lim_{i\to\infty} a_i^{[(r+s)m_i]} = \lim_{i\to\infty} a_i^{[rm_i]} a_i^{[sm_i]} a_i^{\alpha_i} = bce = bc.$$ □

Quelques résultats de convergence

Théorème 3.9 *Soient G un groupe localement compact* NSS *et U un voisinage canonique. Soient $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de G et $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'entier positifs telle que les conditions suivantes satisfaites :*

1. *$\{a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{m_i}\} \subseteq U$ pour tout $i \in \mathbb{N}$,*
2. *la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers l'identité,*
3. *la suite $(a_i^{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans G.*

Alors la suite $(a_i^{[rm_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $r \geq 0$.

Démonstration. Il n'y a rien à montrer pour $r = 0$ et $r = 1$. La méthode est de démontrer la convergence de cette suite pour tout r pris sur le découpage diadique de l'interval $[0,1]$, puis pour r quelconque dans cet interval, et finalement pour $r > 1$.

I. *Soit* $r = 1/2$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_i^{[rm_i]}$ est un élément de l'ensemble $\{a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{m_i}\}$ contenu dans le compact U. Pour montrer que $(a_i^{[rm_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ converge, on utilise la remarque 3.3. Soient $(a_i^{[rm_i]})_{i\in I}$ et $(a_i^{[rm_i]})_{i\in J}$ deux sous-suites. Puisque ces suites sont contenues dans le compact U, elles admettent des sous-suites convergentes $(a_i^{[rm_i]})_{i\in I'}$ et $(a_i^{[rm_i]})_{i\in J'}$. Soient $b \in U$ et $c \in U$ leurs limites respectives. Puisque

$$m_i = [(r+r)m_i] = 2[rm_i] + \mu_i \quad \text{où } \mu_i \in \{0,1\} \text{ pour tout } i \in \mathbb{N},$$

il découle du lemme 3.8 que

$$b^2 = \left(\lim_{i\in I'} a_i^{[rm_i]}\right)^2 = \lim_{i\in I'} a_i^{2[rm_i]} = \lim_{i\in I'} a_i^{[2rm_i]} a_i^{-\mu_i} = \lim_{i\in\mathbb{N}} a_i^{m_i}.$$

De même,

$$c^2 = \left(\lim_{i\in J'} a_i^{[rm_i]}\right)^2 = \lim_{i\in J'} a_i^{m_i} = \lim_{i\in\mathbb{N}} a_i^{m_i}.$$

Donc $b^2 = c^2$. Il s'ensuit que $b = c$ par unicité de la racine dans U. Ainsi, la limite ne dépend des sous-suites $I, J \subseteq \mathbb{N}$ de départ. Par la proposition 3.5, ceci définit un élément

$$\lim_{i\in\mathbb{N}} a_i^{[\frac{1}{2}m_i]} \in U.$$

II. *Soit r de la forme $r_d = \frac{1}{2^d}$ avec $d > 1$.* On suppose que la suite $(a_i^{[r_{d-1}m_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $x(r_{d-1}) \in U$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_i^{[r_d m_i]} \in U$. Soient $(a_i^{[r_d m_i]})_{i\in I}$ et $(a_i^{[r_d m_i]})_{i\in J}$ deux sous-suites. Elles admettent chacune des sous-suites convergentes $(a_i^{[r_d m_i]})_{i\in I'}$ et $(a_i^{[r_d m_i]})_{i\in J'}$. Soient $b, c \in U$ leurs limites respectives. Par un calcul analogue à la partie I.,

$$b^2 = \left(\lim_{i\in I'} a_i^{[r_d m_i]}\right)^2 = \lim_{i\in\mathbb{N}} a_i^{[r_{d-1}m_i]} = \left(\lim_{i\in J'} a_i^{[r_d m_i]}\right)^2 = c^2.$$

Alors $b = c$ par unicité de la racine dans U et la suite $(a_i^{[r_d m_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $x(r_d) \in G$. Le fait que $x(r_d) \in U$ pour tout d provient du fait que la suite $(a_i^{[r_d m_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ est contenue dans le fermé U.

III. *Soit r de la forme $\frac{q}{2^d}$ où q est un entier avec $1 \leq q \leq 2^d$.* L'assertion se déduit par application sucessive du lemme 3.8.

IV. *Soit $0 < r < 1$ quelconque.*
Soient $(a_i^{[rm_i]})_{i\in I}$, $(a_i^{[rm_i]})_{i\in J}$ des sous-suite de $(a_i^{[rm_i]})_{i\in\mathbb{N}}$. Puisque ces suites sont contenue dans U, elles admettent des sous-suites convergentes $(a_i^{[rm_i]})_{i\in I'}$, $(a_i^{[rm_i]})_{i\in J'}$. Soient $y, z \in U$ leur limites respectives. Il faut montrer que $y = z$. Soit W un voisinage quelconque de l'identité. Il suffit de montrer que $y^{-1}z \in W$. Il existe V un voisinage compact symétrique de l'identité avec $V^2 \subseteq W$. Par le théorème 3.6, il existe un nombre réel $r_0 > 0$ associé à V tel que $a_i^{[\rho m_i]} \in V$ pour tout $0 \leq \rho < r_0$.

Il existe un nombre s de la forme $\frac{q}{2^d}$ qui satisfait à $s < r$ et $r - s < r_0$ (pour N suffisamment grand, $s = \frac{2[2^N r]-1}{2^{N+1}}$ convient). Par le point III, la suite $(a_i^{[sm_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $u \in U$.

1) Puisque la suite $(a_i^{[(r-s)m_i]})_{i\in I'}$ est contenue dans V (théorème 3.6), elle admet une sous-suite $(a_i^{[(r-s)m_i]})_{i\in I''}$ convergente vers un élément $v_1 \in V$. A fortiori, $(a_i^{[sm_i]})_{i\in I''}$ convergent vers u. Donc
$$y = \lim_{i\in I'} a_i^{[rm_i]} = \lim_{i\in I''} a_i^{[sm_i]} a_i^{[(r-s)m_i]} = uv_1.$$

2) De la même manière, $(a_i^{[(r-s)m_i]})_{i\in J'}$ admet une sous-suite $(a_i^{[(r-s)m_i]})_{i\in J''}$ convergente vers un élément $v_2 \in V$. Et $(a_i^{[sm_i]})_{i\in J''}$ convergent vers $u \in U$. Donc
$$z = \lim_{i\in J'} a_i^{[rm_i]} = \lim_{i\in J''} a_i^{[(r-s)m_i]} a_i^{[sm_i]} = uv_2.$$

Donc $y^{-1}z = v_1^{-1}u^{-1}uv_2 = v_1^{-1}v_2 \in VV \subseteq W$. Ceci démontre que $(a_i^{[rm_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $0 < r < 1$.

V. *Pour tout $r > 1$, la suite $(a_i^{[rm_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ converge.* Puisque $r - [r] < 1$, la suite $(a_i^{[(r-[r])m_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ converge par le point IV) et donc

$$\lim_{i\to\infty} a_i^{[rm_i]} = \lim_{i\to\infty} a_i^{[(r-[r])m_i]} a_i^{[r]m_i} = \left(\lim_{i\to\infty} a_i^{[(r-[r])m_i]}\right)\left(\lim_{i\to\infty} a_i^{m_i}\right)^{[r]}$$

Ainsi, $(a_i^{[rm_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $r \geq 0$. $\square$

Théorème 3.10 *Soient G un groupe localement compact* NSS *et U un voisinage canonique. Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de G et $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'entier positifs telles que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\{a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{m_i}\} \subseteq U$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$,
2. *la suite* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *converge vers l'identité,*
3. *la suite* $(a_i^{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *converge dans* G.

Soit

$$X(r) = \lim_{i\to\infty} a_i^{[rm_i]} \quad \textit{et} \quad X(-r) = X(r)^{-1} \quad \textit{pour tout } r \geq 0. \tag{5}$$

Alors l'application $X : \mathbb{R} \to G$ ainsi définie est un sous-groupe à un paramètre de G.

Démonstration. Par le théorème 3.9, la limite (5) existe. Par la proposition 2.8 page 5, il suffit de montrer que X est continue en $r = 0$. Par définition,

$$X(0) = \lim_{i\to\infty} a_i^0 = e.$$

Soit V un voisinage de l'identité et soit $V_0 \subseteq V$ un voisinage symétrique compact. Par le théorème 3.6, il existe un nombre $r_0 > 0$ associé à V_0 tel que $a_i^{[rm_i]} \in V_0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout r avec $0 \leq r < r_0$. Soit un tel r fixé. La suite $(a_i^{[rm_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ est contenue dans le fermé V_0 et donc $X(r) \in V_0$. De plus, $X(-r) = X(r)^{-1}$ appartient également à V_0 par symétrie du voisinage V_0. Donc, $X(r) \in V$ pour tout r avec $|r| < r_0$, ce qui montre la continuité en 0. Il s'ensuit que X est continue sur $\mathbb{R}$ (proposition 2.8).

Pour $r, s \geq 0$, le fait que $X(r+s) = X(r)X(s)$ découle immédiatement du lemme 3.8. Les autres cas découlent des relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{Pour } r+s \geq 0 \text{ et } r < 0 \quad & X(r)^{-1}X(r+s) = X(-r)X(r+s) = X(-r+r+s) = X(s),\\
\text{pour } r+s < 0 \text{ et } r \geq 0 \quad & X(r+s)^{-1}X(r) = X(-(r+s))X(r) = X(-(r+s)+r) = X(s)^{-1},\\
\text{pour } s < 0 \text{ et } r < 0 \quad & X(s)^{-1}X(r)^{-1} = X(-s)X(-r) = X(-(r+s)) = X(r+s)^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.11 *Soit G un groupe* NSS *localement compact. Si G n'est pas discret, alors G admet un sous-groupe à un paramètre non-trivial.*

Démonstration. Le groupe G admet un voisinage canonique U par le théorème 3.4. Soit $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une base de voisinage de l'identité. Soient $U_1 = V_1 \cap U$ et $U_i = U_{i-1} \cap V_i$ pour tout i. Ainsi $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de voisinages de l'identité contenue dans U avec $\bigcap_i U_i = \{e\}$. Par ailleurs, $U_i \neq \{e\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ car G n'est pas discret. Ainsi, il existe $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de G tel que $a_i \in U_i$ et $a_i \neq e$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. De plus, la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers l'identité par construction.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit m_i le plus grand entier positif tel que $\{a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{m_i}\} \subseteq U$. En particulier, $a_i^{m_i+1} \notin U$. Un tel nombre m_i existe car sinon U contiendrait le sous-groupe engendré par a_i ($\neq \{e\}$). La suite $(a_i^{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$ étant contenue dans le compact U, elle admet une sous-suite convergente. Soit $(a_i^{m_i})_{i\in I}$ cette sous-suite et b sa limite. Puisque la suite $(a_i^{m_i+1})_{n\in I}$ est contenue dans le complémentaire de U et qu'elle converge également vers b, il s'ensuit que b appartient au bord de U et donc $b \neq e$.

Les suites $(a_i)_{i\in I}$ et $(m_i)_{i\in I}$ satisfont pleinement aux conditions du théorème 3.9 et définissent donc un sous-groupe à un paramètre X. De plus

$$X(1) = \lim_{i\in I} a_i^{m_i} = b \neq e.$$

□

3.3 Généralisation

Le but de cette section est de généraliser les résultats précédents à une classe plus large de suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en introduisant un paramètre k. Ceci donnera une terminologie commode à utiliser par la suite.

Théorème 3.12 *Soient G un groupe localement compact* NSS *et U un voisinage canonique. Soient un réel $k > 0$, $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de G et $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers positifs telle que :*

1. $\{a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{[km_i]}\} \subseteq U$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$,
2. *la suite* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *converge vers l'identité,*
3. *la suite* $(a_i^{[km_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ *converge dans* G.

Alors la suite $(a_i^{[rm_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $r \geq 0$.

Démonstration. Soit $r > 0$ fixé. Puisque les suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $([km_i])_{i\in\mathbb{N}}$ satisfont aux hypothèses du théorème 3.9, il s'ensuit que la suite $(a_i^{[s[km_i]]})_{i\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $s \geq 0$, en particulier pour $s = \frac{r}{k}$. Vu que $0 \leq km_i - [km_i] < 1$, en multipliant par $\frac{r}{k}$ puis en prenant la valeur entière cette expression, on trouve $0 \leq [rm_i - \frac{r}{k}[km_i]] \leq [\frac{r}{k}]$. D'autre part,

$$[rm_i] = [(rm_i - \tfrac{r}{k}[km_i]] + [\tfrac{r}{k}[km_i]] + \alpha_i \quad \text{où } \alpha_i \in \{0, 1\}.$$

Il s'ensuit que les suites $(a_i^{[rm_i - \frac{r}{k}[km_i]]})_{i\in\mathbb{N}}$ et $(a_i^{\alpha_i})_{i\in\mathbb{N}}$ convergent vers l'identité par le lemme 3.7. Donc

$$\lim_{i\to\infty} a_i^{[rm_i]} = \lim_{i\to\infty} a_i^{[rm_i - \frac{r}{k}[km_i]]} a_i^{[\frac{r}{k}[km_i]]} a_i^{\alpha_i} = \lim_{i\to\infty} a_i^{[\frac{r}{k}[km_i]]}.$$

□

Définition 3.4 Une suite de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite croissante vers l'infini si, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un indice $j \in \mathbb{N}$ tel que $x_i \geq M$ pour tout $i \geq j$.

Théorème 3.13 *Soient G un groupe localement compact* NSS *et U un voisinage canonique. Soient $k > 0$ un nombre réel positif, $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de G et $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers positifs telles que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ croît vers l'infini,*
2. *$\{a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{[km_i]}\} \subseteq U$ pour tout $i \in \mathbb{N}$,*
3. *$(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers l'identité,*
4. *$(a_i^{[km_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans G.*

Alors pour tout voisinage V de l'identité, il existe un nombre réel positif r_0 associé à V tel que

$$a_i^{[rm_i]} \in V \qquad \textit{pour tout } r \textit{ avec } 0 \leq r < r_0.$$

Démonstration. Soit V un voisinage de l'identité. Les suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $([km_i])_{i\in\mathbb{N}}$ satisfont aux conditions du théorème 3.6. Ainsi, il existe un nombre réel positif s_1 associé à V tel que

$$a_i^{[s[km_i]]} \in V \qquad \text{pour tout } r \text{ avec } 0 \leq s < s_1.$$

Soit s_0 un nombre réel avec $0 < s_0 < s_1$. Ainsi, $\{a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{[s_0[km_i]]}\} \subseteq V$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Pour démontrer le théorème, il suffit de démontrer qu'il existe un nombre réel $r_0 > 0$ tel que

$$[rm_i] \leq [s_0[km_i]] \qquad \text{pour tout } i \in \mathbb{N} \text{ et tout } r \text{ avec } 0 \leq r < r_0.$$

Puisque la suite $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ croît vers l'infini, il existe un indice $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2}{k} \leq m_i$ pour tout $i \geq j_0$.

I. Soit $i \in \mathbb{N}$ avec $i \geq j_0$. Alors

$$2 \leq km_i, \quad -\tfrac{km_i}{2} \leq -1, \quad -\tfrac{km_i}{2} + km_i = \tfrac{km_i}{2} \leq km_i - 1.$$

Par ailleurs, $km_i - [km_i] < 1$, donc $km_i - 1 < [km_i]$ et

$$\tfrac{km_i}{2} \leq [km_i] \quad \text{pour tout } i \geq j_0.$$

Soit $\rho_0 = \frac{s_0 k}{2}$ et soit ρ avec $0 \leq \rho < \rho_0$. Il s'ensuit que

$$\rho m_i < s_0 \tfrac{km_i}{2} \leq s_0[km_i] \quad \text{et donc} \quad [\rho m_i] \leq [s_0[km_i]].$$

II. Soit $i \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq i \leq j_0 - 1$ et soit

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{1}{m_i+1} s_0[km_i] & \text{si } [km_i] \neq 0, \\ k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit ρ avec $0 \leq \rho < \rho_i$. Si $[km_i] \neq 0$, alors

$$\rho m_i \leq \frac{m_i}{m_i + 1} s_0[km_i] < s_0[km_i] \quad \text{et donc} \quad [\rho m_i] \leq [s_0[km_i]].$$

Si $[km_i] = 0$, alors $0 \leq \rho < k$ implique $\rho m_i \leq km_i$ et donc $[\rho m_i] \leq [km_i] = 0 = [s_0[km_i]]$.

Il suffit donc de considérer $r_0 = \min\{\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{j_0-1}\}$. □

Théorème 3.14 *Soient G un groupe localement compact* NSS *et U un voisinage canonique. Soient $k > 0$ un réel positif, $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de G et $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'entier positifs telles que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ croît vers l'infini,*
2. *$\{a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{[km_i]}\} \subseteq U$ pour tout $i \in \mathbb{N}$,*
3. *la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers l'identité,*
4. *la suite $(a_i^{[km_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans G.*

Soit

$$X(r) = \lim_{i\to\infty} a_i^{[rm_i]} \quad \text{et} \quad X(-r) = X(r)^{-1} \quad \text{pour tout } r \geq 0. \tag{6}$$

Alors l'application $X : \mathbb{R} \to G$, $r \mapsto X(r)$ définit un sous-groupe à un paramètre de G.

Démonstration partielle. Par le théorème 3.12, la limite (6) existe. Il suffit de montrer que X est continue en $r = 0$. Par définition,

$$X(0) = \lim_{i\to\infty} a_i^0 = e.$$

Soit V un voisinage de l'identité et soit $V_0 \subseteq V$ un voisinage symétrique compact. Par le théorème 3.13, il existe un nombre $r_0 > 0$ associé à V_0 tel que $a_i^{[rm_i]} \in V_0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout r avec $0 \leq r < r_0$. Le reste de la démonstration est strictement identique à celle du théorème 3.10. $\square$

3.4 Suites standards

On introduit une termonologie simplifiée.

Dans ce paragraphe, G désigne un groupe localement compact NSS et U un voisinage canonique.

Définition 3.5 Soient $(a_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $G \times \mathbb{N}$ et $k > 0$ un nombre réel. La suite $(a_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dite standard de module k et relative à U (où alors simplement standard) si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers l'identité,
2. $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ croît vers l'infini,
3. $\{a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{[km_i]}\} \subseteq U$ pour tout $i \in \mathbb{N}$

Définition 3.6 Une suite standard $(a_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de module k et relative à U est dite convergente si la suite $(a_i^{[km_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ converge. Par le théorème 3.14, l'application $X : \mathbb{R} \to G$ donnée par (6) définit un sous-groupe à un paramètre. On appelle X la limite de la suite standard.

Proposition 3.15 *Toute suite standard admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit $(a_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite standard de module k. Puisque $a_i^{[km_i]}$ appartient au compact U pour tout i, il existe une sous-suite de $(a_i^{[km_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente. Le résultat suit en appliquant le théorème 3.14 à cette sous-suite. $\square$

4 Fonctions différentiables sur des groupes

Nous partons d'un groupe séparé. Les hypothèses supplémentaires sont mentionnées selon les besoins.

Définition 4.1 Soit $F : \mathbb{R} \to \mathscr{C}_c(G)$ une application définie sur les réels. On dit que F est différentiable au point $r \in \mathbb{R}$ si la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(r+h) - F(r)}{h}$$

existe dans $(\mathscr{C}_c(G), \| \ \|)$.

Autrement dit, F est différentiable au point r s'il existe $g \in \mathscr{C}_c(G)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ avec

$$0 < |h| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{F(r+h)(x) - F(r)(x)}{h} - g(x) \right| < \varepsilon \qquad \text{pour tout } x \in G.$$

Définition 4.2 Soit G un groupe topologique et $f \in \mathscr{C}_c(G)$. On dit que f est différentiable si, pour tout sous-groupe à un paramètre X l'application $r \mapsto X(r).f$ est différentiable au sens de la définition 4.1. Auquel cas, la différentielle de f selon X au point r est noté $X(r)D_X f$. Alors, $X(r)D_X f \in \mathscr{C}_c(G)$.

Une caractérisation des fonctions différentiables

En faisant agir $\mathbb{R}$ sur le paramètre de X, on obtient une définition équivalente de la notion de fonction différentiable. Celle-ci sera sensiblement plus commode à utiliser au paragraphe 4.4. On rappelle que L est l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de G.

Définition 4.3 Pour tout $X \in \mathrm{L}$, $\lambda, r \in \mathbb{R}$, soit $(\lambda X)(r) = X(\lambda r)$.

Proposition 4.1 *Soient $X \in \mathrm{L}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda X \in \mathrm{L}$. De plus $D_{\lambda X} f = \lambda D_X f$ pour toute fonction différentiable $f \in \mathscr{C}_c(G)$.*

Démonstration. λX est un homomorphisme de $\mathbb{R}$ dans G : $(\lambda X)(r+s) = X(\lambda r + \lambda s) = X(\lambda r)X(\lambda s) = \big((\lambda X)(r)\big)\big((\lambda X)(s)\big)$. Pour la continuité, il suffit de montrer que λX est continue en 0. Soit V un voisinage de l'identité. Il existe $\delta > 0$ tel que $X(r) \in V$ pour tout $|r| < \delta$. Alors $|r| < \delta / |\lambda|$ implique $(\lambda X)(r) = X(\lambda r) \in V$. Ainsi, $\lambda X \in \mathrm{L}$.

La seconde assertion est immédiate si $\lambda = 0$. Soient $\lambda \neq 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tel que $0 < |h_1| < \delta_1$ et $0 < |h_2| < \delta_2$ impliquent

$$\left\| D_{\lambda X} f - \frac{(\lambda X)(h_1) f(x) - f(x)}{h_1} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left\| D_X f - \frac{X(h_2) f - f}{h_2} \right\| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}.$$

Donc $0 < |h| < \min\{\delta_1, \frac{\delta_2}{|\lambda|}\}$ implique

$$\|D_{\lambda X} f - \lambda D_X f\| \leq \left\| D_{\lambda X} f - \frac{(\lambda X)(h) f - f}{h} \right\| + \left\| \lambda \frac{(\lambda X)(h) f - f}{\lambda h} - \lambda D_X f \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda| \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} = \varepsilon. \qquad \square$$

Définition 4.4 Soit U un voisinage de l'identité et soit $K_1 = \{X \in \mathrm{L} \mid X(t) \in U, \text{ pour tout } |t| \leq 1.\}$.

Proposition 4.2 *Soit U un voisinage de l'identité. Une fonction $f \in \mathscr{C}_c(G)$ est différentiable si et seulement si $D_X f$ existe pour tout $X \in K_1$.*

Démonstration. Il suffit de montrer le sens « $\Leftarrow$ ». Soit $X \in \mathrm{L}$. Par continuité, il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que $X(t) \in U$ pour tout $|t| \leq \lambda$. Soient $Y = \lambda X$ et $t \in \mathbb{R}$ avec $|t| \leq 1$. Alors $Y(t) = (\lambda X)(t) = X(\lambda t) \in U$ car $|\lambda t| \leq \lambda$. Donc $Y \in K_1$. Ainsi, pour tout $X \in \mathrm{L}$, il existe $Y \in K_1$ et $\lambda > 0$ avec $Y = \lambda X$.

Supposons que $D_Y f$ existe pour tout $Y \in K_1$. Soit $X \in \mathrm{L}$. Il existe $\lambda > 0$ et $Y \in K_1$ avec $Y = \lambda X$. Puisque $D_X f = D_{\lambda^{-1} Y} f = \lambda^{-1} D_Y f$ et que $\lambda^{-1} D_Y f \in \mathscr{C}_c(G)$ existe, il s'ensuite que $D_X f$ existe et $D_X f \in \mathscr{C}_c(G)$ car $D_Y f \in \mathscr{C}_c(G)$. $\square$

La fonction identiquement nulle sur G est notée 0_G : $0_G(x) = 0$ pour tout $x \in G$. A priori, l'existence d'une fonction différentiable non-nulle n'est pas garantie. Celle-ci sera donnée en appliquant le théorème suivant à une famille d'objets $(Q_i, n_i,\ \Delta_i, \phi_i,\psi_i)$ judicieusement élaborée.

Théorème 4.3 *Soient G un groupe* NSS *localement compact et soient :*

1. *U un voisinage canonique dans G*
2. *K une partie compact non-vide de G*
3. *$(a_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite standard de module $k > 0$ relativement à U*
4. *$(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{C}_c(G)$ et $f \in \mathscr{C}_c(G)$*
5. *X un sous-groupe à un paramètre de G.*

tels que les conditions suivantes sont satisfaites

1. *la suite standard $(a_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers X,*
2. *la suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $(\mathscr{C}_c(G), \|\ \|)$,*
3. *$\operatorname{supp} f_i \subseteq K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$,*
4. *la suite $(m_i(a_i.f_i - f_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite équicontinue sur G et uniformément bornée.*

Alors la différentielle $D_X f$ existe. De plus la suite $(m_i(a_i.f_i - f_i))_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $D_X f$.

Démonstration. Pour montrer que $(m_i(a_if_i-f_i))_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers D_Xf, On utilise la proposition 3.5 et la remarque qui la suit. On considère deux sous-suites de $(m_i(a_if_i-f_i))_{i\in\mathbb{N}}$. Il suffit de montrer qu'une seule d'entre-elle admet une sous-suite convergente vers D_Xf. Il s'ensuivra que la seconde converge également vers la même limite et donc que la suite initiale converge. Par le théorème d'Arzéla-Ascoli, on peut supposer après avoir renomé les indices que $(m_i(a_if_i - f_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est l'une desdites suite convergente. Soit g sa limite. Il reste alors à montrer que $g = D_Xf$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il faut montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |h| < \delta$ implique

$$\left\| \frac{X(h)f - f}{h} - g \right\| < \varepsilon.$$

Puisque pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_i \in U$, le support de $m_i(a_if_i - f_i)$ est contenu dans le compact UK. Par la proposition 2.9, la fonction g est continue et à support compact. Donc g est uniformément continue à gauche par la proposition 2.7. Donc, il existe V un voisinage de l'identité tel que

$$\|g - cg\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } c \in V.$$

Par le théorème 3.13, il existe un nombre réel r_0 associé à V tel que $a_i^{[rm_i]} \in V$ pour tout $0 < r < r_0$. Soit $0 < h < r_0$ quelconque. En particulier, la relation précédente implique

$$\big\|g - a_i^{[hm_i]}g\big\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Par ailleurs

$$\lim_{i\to\infty} \tfrac{[hm_i]}{m_i} = h$$

car $0 \le hm_i - [hm_i] < 1$, $0 \le h - \frac{[hm_i]}{m_i} < \frac{1}{m_i}$ et la suite $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini. En utilisant la proposition 2.10, on a :

$$\frac{X(h)f - f}{h} = \lim_{i\to\infty} \frac{m_i\big(a_i^{[hm_i]}f_i - f_i\big)}{[hm_i]}.$$

Il existe donc $i_0 \in \mathbb{N}$ (i_0 dépend de h) tel que

$$\left\| \frac{X(h)f - f}{h} - \frac{m_i\big(a_i^{[hm_i]}f_i - f_i\big)}{[hm_i]} \right\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } i \ge i_0. \tag{8}$$

Enfin, il existe un entier $i_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|m_i\big(a_if_i - f_i\big) - g\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } i \ge i_1. \tag{9}$$

Pour résumer, V et i_1 dépendent de ε, r_0 dépend de V, i_0 dépend de h. Soient $0 < h < r_0$ et $i \geq \max\{i_0, i_1\}$. On note $d_i = [hm_i]$ pour abréger. Les équations (7), (8) et (9) montrent alors :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{X(h)f - f}{h} - g \right\| &< \frac{\varepsilon}{3} + \left\| \frac{m_i\big(a_i^{d_i} f_i - f_i\big)}{d_i} - g \right\| = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{d_i} \left\| m_i \left(a_i^{[hm_i]} f_i - f_i\right) - d_i g \right\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{d_i} \left\| m_i \left(\sum_{t=0}^{d_i-1} a_i^{t+1} f_i - a_i^t f_i \right) - \sum_{t=0}^{d_i-1} a_i^t g + \sum_{t=0}^{d_i-1} a_i^t g - \sum_{t=0}^{d_i-1} g \right\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{d_i} \left\| \sum_{t=0}^{d_i-1} m_i\big(a_i^{t+1} f_i - a_i^t f_i\big) - \sum_{t=0}^{d_i-1} a_i^t g \right\| + \frac{1}{d_i} \left\| \sum_{t=0}^{d_i-1} (a_i^t g - g) \right\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{d_i} \left\| \sum_{t=0}^{d_i-1} a_i^t\big(m_i(a_i f_i - f_i) - g\big) \right\| + \frac{1}{d_i} \sum_{t=0}^{d_i-1} \|a_i^t g - g\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{d_i} \sum_{t=0}^{d_i-1} \left\| a_i^t\big(m_i(a_i f_i - f_i) - g\big) \right\| + \frac{1}{d_i} \sum_{t=0}^{d_i-1} \frac{\varepsilon}{3} \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{1}{d_i} \sum_{t=0}^{d_i-1} \|m_i(a_i f_i - f_i) - g\| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{1}{d_i} \sum_{t=0}^{d_i-1} \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

4.1 Famille de fonctions

Pour certaines des constructions suivantes, il n'est pas nécessaire de faire l'hypothèse que le groupe n'admet aucun petit sous-groupe. On aura soin d'énumérer systématiquement les hypothèses au début.

4.1.1 L'ensemble Q

Dans un premier temps (jusqu'au paragraphe 4.1.3), il est aproprié de postuler l'existence d'un ensemble Q qui satisfait aux conditions ci-dessous.

Définition 4.5 Soit G un groupe topologique et soit U un voisinage compact et symétrique de l'identité. Un sous-ensemble non-vide Q de U est dit admissible (pour U) si

(a) Q est symétrique (donc $e \in Q$),

(b) $Q \neq \{e\}$,

(c) le sous-groupe de G engendré par Q n'est pas contenu dans U.

4.1.2 L'entier n

Proposition 4.4 *Soit G un groupe topologique et soit U un voisinage compact et symétrique de l'identité. Pour tout sous-ensemble Q admissible pour U, il existe un unique entier positif minimal $n = n_{Q,U}$ tel que $Q^n \nsubseteq U$.*

Démonstration. Si un tel entier n'existe pas, alors on aurait

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Q \cup Q^{-1})^k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q^k \subseteq U$$

puisque Q est symétrique, montrant ainsi que U contient le sous-groupe engendré par Q. □

Définition 4.6 On appelle $n_{Q,U}$ l'entier associé au couple (Q, U).

4.1.3 La fonction Δ

Définition 4.7 Soient G un groupe topologique, U un voisinage compact et symétrique de l'identité et Q un sous-ensemble admissible pour U. Soit $n = n_{Q,\,U}$ l'entier associé. La fonction escalier associée à (Q, U)

est

$$\Delta : G \to \mathbb{R}, \qquad \Delta(x) = \begin{cases} 0 & x = e, \\ 1/n & x \in Q, x \neq 1, \\ 2/n & x \in Q^2, x \notin Q, \\ 3/n & x \in Q^3, x \notin Q^2, \\ \vdots & \vdots \\ (n-1)/n & x \in Q^{n-1}, x \notin Q^{n-2}, \\ 1 & x \notin Q^{n-1}. \end{cases} \tag{10}$$

Propriété 4.5 *Soient G un groupe topologique, U un voisinage compact et symétrique de l'identité et Q un sous-ensemble admissible pour U. Soit $n = n_{Q,U}$ l'entier associé. Soit Δ fonction définie par* (10). *Alors pour tout $x, y \in G$,*
(a) $\Delta(x) = 1$ *pour tout* $x \notin U$,
(b) $0 \leq \Delta(x) \leq 1$ *pour tout* $x \in G$,
(c) $\Delta(x) = \Delta(x^{-1})$,
(d) si $\Delta(x) \leq i/n$, *alors* $x \in Q^j$ *pour un certain* $j \leq i$,
(e) $\Delta(xy) \leq \Delta(x) + \Delta(y)$,
(f) $|\Delta(qx) - \Delta(x)| \leq 1/n$ *pour tout* $q \in Q$.

Démonstration. (a) Puisque $Q^{n-1} \subseteq U$, $x \notin U$ implique $x \notin Q^{n-1}$. (b) C'est clair… (c) Puisque Q est symétrique, les ensembles Q^j le sont également.

(d) Si $\Delta(x) \leq i/n$, alors l'un des cas suivant est vérifié

$$x = e; \quad x \in Q,\, x \neq e; \quad x \in Q^2,\, x \notin Q; \quad \ldots; \quad x \in Q^i,\, x \notin Q^{i-1}.$$

(e) Si $1 \leq \Delta(x) + \Delta(y)$, alors $\Delta(xy) \leq \Delta(x) + \Delta(y)$ par le point (b). Sinon, on a $\Delta(x) = i/n$ et $\Delta(y) = j/n$ avec $i + j < n$. Mais alors $x \in Q^i$ et $y \in Q^j$ par le point précédent et donc $xy \in Q^iQ^j = Q^{i+j}$. Ainsi $\Delta(xy) \leq (i + j)/n = \Delta(x) + \Delta(y)$.

(f) Soit $q \in Q$ avec $q \neq e$. Alors $\Delta(qx) \leq \Delta(q) + \Delta(x) \leq 1/n + \Delta(x)$ et donc $\Delta(qx) - \Delta(x) \leq 1/n$. Réciproquement, $1/n = \Delta(q) = \Delta(qxx^{-1}) \leq \Delta(qx) + \Delta(x^{-1}) = \Delta(qx) + \Delta(x)$. Donc $\Delta(x) - \Delta(qx) \leq 1/n$. □

4.1.4 La fonction ϑ

La fonction Δ est une fonction à valeur discrète qui représente en quelque sorte la croissance des ensembles $Q, Q^2, Q^3, \ldots, Q^{n-1}$. L'objectif est de disposer d'une fonction $\phi : G \to [0, 1]$ continue avec la même propriété. Pour l'obtenir, il faut une fonction de passage ϑ qui va « lisser » la fonction Δ. Il va être crucial que la fonction obtenue ait un extremum strict au point $x = e$.

Définition 4.8 Soit G un groupe. Une fonction $f \in \mathbb{R}^G$ est dite propre si l'identité est un maximum global strict de f. Autrement dit $f(x) \leq f(e)$ pour tout $x \in G$ avec égalité si et seulement si $x = e$.

La proposition suivante est valable dans le cadre des espaces métriques en général mais nous la donnons pour les groupes topologiques métrisables afin de disposer d'un énoncé formel. L'existence de la fonction ϑ est donnée par le théorème d'extension de Tietze, qui est un corollaire du lemme d'Urysohn ([10]).

Théorème (d'extension de Tietze) *Soit (X, d) un espace métrique et soit l'intervale* $[0, 1]$ *munit de la topologie euclidienne usuelle. Soient W un sous-ensemble ferné non-vide de X et $\tilde{f} : W \to [0, 1]$ une application continue. Alors il existe une fonction continue $f : X \to [0, 1]$ telle que $f(x) = \tilde{f}(x)$ pour tout $x \in W$.*

Proposition 4.6 *Soient G un groupe topologique métrisable, U un voisinage fermé de l'identité. Alors il existe une fonction ϑ sur G qui satisfait aux conditions suivantes :*
(a) $0 \leq \vartheta(x) \leq 1$ *pour tout* $x \in G$,
(b) ϑ *est propre,*

(c) $\vartheta(x) = 0$ *pour tout* $x \notin U$*,*
(d) ϑ *est continue sur* G*.*

Démonstration. Soit d une métrique associée à la topologie de G. Puisque U est un voisinage de l'identité, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $\{y \in G \,|\, d(e,y) < \delta\} \subseteq U$. Soit $r = \min\{1/2, \delta/2\}$ et soit $A = \{y \in G \,|\, d(x,y) \leq r\} \cup \overline{G \setminus U}$. Alors, A est fermé. De plus, l'union est disjointe car si un élément x se trouvait dans l'intersection, on aurait $x \notin U$ et donc $x \notin \{y \in G \,|\, d(e,y) < \delta\}$, d'où la contradiction $d(e,x) \leq r \leq \delta/2 < \delta \leq d(e,x)$. Soit $\tilde{\vartheta} : A \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\tilde{\vartheta}(x) = \begin{cases} 1 - d(e,x) & \text{pour tout } x \in \{y \in G \,|\, d(e,y) \leq r\}, \\ 0 & \text{pour tout } x \in \overline{G \setminus U}. \end{cases}$$

Puisque $r \leq 1$, on a $0 \leq \tilde{\vartheta}(x) \leq 1$ pour tout $x \in A$ et $\tilde{\vartheta}(x) = 1$ si et seulement si $x = e$; ce qui signifie que $\tilde{\vartheta}$ est propre. Cette application est continue sur $\{y \in G \,|\, d(e,y) \leq r\}$ par la continuité de l'application $x \mapsto d(e,x)$. Par le théorème d'extension de Tietze, il existe $\vartheta : G \to [0,1]$ une application continue sur G qui étend $\tilde{\vartheta}$. En particulier, cette application est propre, continue et s'annule en dehors de U. □

4.1.5 La fonction ϕ

Dans ce paragraphe, G est un groupe métrisable, U un voisinage compact symétrique de l'identité, Q un sous-ensemble admissible pour U, $n = n_{Q,U}$ l'entier associé, Δ la fonction escalier pour Q et ϑ une fonction propre, continue et à support dans U.

Définition 4.9 La fonction représentative de $(U, Q, n, \Delta, \vartheta)$ est :

$$\phi : G \to \mathbb{R}, \qquad \phi(x) = \sup_{y \in G} \,(1 - \Delta(y))\vartheta(y^{-1}x).$$

Propriété 4.7 *(a)* $0 \leq \phi(x) \leq 1$ *pour tout* $x \in G$*,*
(b) ϕ *est propre,*
(c) $|\phi(qx) - \phi(x)| \leq 1/n$ *pour tout* $q \in Q$
(d) $\phi(x) = 0$ *pour tout* $x \notin U^2$*,*
(e) ϕ *est continue sur* G*.*

Démonstration. (a) Évident, car $0 \leq 1 - \Delta(y) \leq 1$ et $0 \leq \vartheta(y^{-1}x) \leq 1$ pour tout $x, y \in G$.

(b) Le terme $\Delta(y)$ est minimal pour $y = e$ et donc $1 - \Delta(y)$ est maximal pour $y = e$. Par ailleurs, $\vartheta(y^{-1}x)$ est maximal pour $y^{-1}x = e$ car ϑ est propre. Donc le produit $(1-\Delta(y))\vartheta(y^{-1}x)$ est maximal pour $x = y = e$ et il vaut 1. Donc $\phi(e) = 1$.
Soit $x \neq e$. Il faut montrer que $\phi(x) < 1$. Puisque ϑ est propre, $\vartheta(y^{-1}x) \leq 1$ avec égalité si et seulement si $y = x$. Si $y = x$, alors $y \neq e$ et donc $1 - \Delta(y) \leq \frac{n-1}{n} < 1$. Si $y \neq x$, alors $y^{-1}x \neq e$ et donc il existe un réel δ tel que $\vartheta(y^{-1}x) \leq \delta < 1$ pour tout $y \neq x$. Donc $\phi(x) \leq \max\{\delta, \frac{n-1}{n}\} < 1$ pour tout $x \neq e$.

(c) Soit $q \in Q$ et $x \in G$. Alors $|\Delta(qx) - \Delta(x)| < 1/n$. Vu que

$$\{(1 - \Delta(y))\vartheta(y^{-1}qx) \,|\, y \in G\} = \{(1 - \Delta(y))\vartheta((q^{-1}y)^{-1}x) \,|\, y \in G\} = \{(1 - \Delta(qy))\vartheta(y^{-1}x) \,|\, y \in G\},$$

et que d'autre part

$$\begin{aligned}(1 - \Delta(qy))\vartheta(y^{-1}x) - (1 - \Delta(y))\vartheta(y^{-1}x) &= (1 - \Delta(qy) - (1 - \Delta(y)))\vartheta(y^{-1}x) \\ &\leq \left|\Delta(qy) - \Delta(y)\right| \vartheta(y^{-1}x) \leq \vartheta(y^{-1}x)/n \leq 1/n,\end{aligned}$$

il s'ensuit que, pour tout $y \in G$,

$$\phi(x) - (1 - \Delta(y))\vartheta(y^{-1}x) = \left(\sup_{z \in G}(1 - \Delta(qz))\vartheta(z^{-1}x)\right) - (1 - \Delta(y))\vartheta(y^{-1}x) \leq 1/n.$$

Et donc,

$$\phi(qx) - \phi(x) \leq \phi(qx) - \left(\sup_{y \in G}(1-\Delta(y))\vartheta(y^{-1}x)\right) \leq 1/n.$$

De la même manière, on a $\phi(x) - \phi(qx) \leq 1/n$.

(d) Il faut montrer que $\phi(x) = 0$ pour tout $x \notin U^2$. Puisque $\Delta(y) = 1$ pour $y \notin U$, le supremum peut être restreint à $y \in U$. Si par l'absurde, il existe $x \in G$ avec $x \notin U^2$ et $\phi(x) \neq 0$, ceci impliquerait $(1-\Delta(y))\vartheta(y^{-1}x) \neq 0$ et donc $\vartheta(y^{-1}x) \neq 0$ pour un certain $y \in U$. Or, ϑ s'annule en dehors de U, il s'ensuit que $y^{-1}x \in U$, et donc $x \in Uy \subseteq U^2$ contradiction.

Le point (e) est démontré ultérieurement (§ 4.2). On montre l'équicontinuité de toute une suite de fonction $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$. □

4.1.6 La fonction ψ

Dans ce paragraphe, G est un groupe topologique métrisable localement compact, U un voisinage compact symétrique de l'identité, Q un sous-ensemble admissible pour U, $n = n_{Q,U}$ l'entier associé, Δ la fonction escalier pour Q, ϑ une fonction propre, continue, lisse pour U et à support dans U, ϕ la fonction représentative de $(U, Q, n, \Delta, \vartheta)$.

Nous recourons maintenant à la mesure de Haar à gauche. Cet outil s'accomode admirablement aux besoins des démonstrations ultérieures.

Définition 4.10 La fonction représentative de ϕ est :

$$\psi : G \to \mathbb{R}, \qquad \psi(u) = \int \phi(ux)\phi(x)\, \mathrm{d}x.$$

Propriété 4.8 $\psi(x) = 0$ *pour tout* $x \notin U^4$.

Démonstration. D'après la propriété 4.7(d), le terme $\phi(x)$ dans l'intrégrale s'annule pour tout $x \notin U^2$. L'intégrale peut donc ce restreindre à U^2. Supposons par l'absurde qu'il existe $u \notin U^4$ avec $\psi(u) \neq 0$. Dans ce cas, il existe donc $x \in U^2$ avec $\phi(ux) \neq 0$. Ce qui implique que $ux \in U^2$. Mais alors $u \in U^2x^{-1} \subseteq U^2U^2 = U^4$. Contradiction. □

Propriété 4.9 $\psi \in \mathscr{C}_c(G)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe V un voisinage ouvert de l'identité tel que

$$|\phi(zx) - \phi(x)| < \frac{\varepsilon}{m(U^2)} \quad \text{pour tout } x \in G \text{ et tout } z \in V.$$

Soit $W = V \cap U$. Alors W est un voisinage de l'identité. Par invariance à gauche de la mesure de Haar, pour tout $z \in W$ et pour tout $u \in G$, on a

$$\begin{aligned} |\psi(zu) - \psi(u)| &\leq \int |\phi(zux) - \phi(ux)|\, \phi(x)\, \mathrm{d}x = \int |\phi(zx) - \phi(x)|\, \phi(u^{-1}x)\, \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{\varepsilon}{m(U^2)} \int \phi(u^{-1}x)\, \mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{m(U^2)} \int \phi(x)\, \mathrm{d}x \leq \varepsilon \end{aligned}$$

car ϕ s'annule en dehors de U^2. Ainsi, ψ est uniformément continue à gauche. Par ailleurs, la fonction ψ s'annule en dehors du compact U^4. Par la proposition 2.7, ψ est (uniformément) continue sur G. □

4.2 Une suite $(Q_i, n_i, \Delta_i, \vartheta, \phi_i, \psi_i)$

Soient G un groupe localement compact NSS, U un voisinage canonique, ϑ une fonction propre, continue sur G et qui s'annule en dehors de U. Soit une suite d'éléments $(Q_i, n_i, \Delta_i, \phi_i, \psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ où chacunes des composantes correspondent aux ensembles, nombres et fonctions définis dans la partie 4.1. Notons quelques propriétés conservées de ces objets :

(a) La fonction de passage ϑ de Δ_i à ϕ_i est la même pour tout $i \in \mathbb{N}$. Explicitement,

$$\phi_i(x) = \sup_{y\in G}(1 - \Delta_i(y))\vartheta(y^{-1}x).$$

(b) Les fonctions Δ_i, ϕ_i et ψ_i s'annulent en dehors de U, U^2 et U^4 respectivement.

Proposition 4.10 *La suite $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur G.*

Démonstration. Par le paragraphe 4.1.4, $\vartheta \in \mathscr{C}_c(G)$ et donc ϑ est uniformément continue sur G. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe V un voisinage de l'identité tel que $|\vartheta(xz) - \vartheta(x)| < \varepsilon$ pour tout $z \in V$ et tout $x \in G$. Donc, pour tout $x \in G$, tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $z \in V$:

$$(1 - \Delta_i(y))\vartheta(y^{-1}xz) - (1 - \Delta_i(y))\vartheta(y^{-1}x) \leq (1 - \Delta_i(y))\,|\vartheta(y^{-1}xz) - \vartheta(y^{-1}x)| < \varepsilon.$$

Ainsi, $\phi_i(xz) - (1 - \Delta_i(y))\vartheta(y^{-1}x) \leq \varepsilon$ et $\phi_i(xz) - \phi_i(x) \leq \varepsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. De même $-(\phi_i(xz) - \phi_i(x)) \leq \varepsilon$. Donc la suite $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est équicontinue à droite en tout point $x \in G$. En considérant le voisinage de l'identité $x^{-1}Vx$, on montre également que $|\phi_i(zx) - \phi_i(x)| < \varepsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $z \in x^{-1}Vx$. □

Proposition 4.11 *Soit $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de G avec $q_i \in Q_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et soit $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ les entiers associés aux couples (Q_i, U). Alors*

(a) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la fonction $n_i(q_i\psi_i - \psi_i)$ s'annule en dehors de U^5.

(b) la suite $(n_i(q_i\psi_i - \psi_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur G et uniformément bornée par rapport à $i \in \mathbb{N}$ et à $q_i \in Q_i$.

Démonstration. (a) Puisque $\psi(u) = 0$ pour tout $u \notin U^4$, il s'ensuit que $\psi(q_i^{-1}u) - \psi(u) = 0$ pour tout $u \notin U^5$. En effet, dans le cas contraire, il existerait $u \notin U^5$ avec $\psi(q_i^{-1}u) - \psi(u) \neq 0$, c'est-à-dire $\psi(q_i^{-1}u) \neq 0$ ou $\psi(u) \neq 0$ (ou les deux). Mais $\psi(q_i^{-1}u) \neq 0$ implique $q_i^{-1}u \in U^4$ et donc $u \in q_iU^4 \subseteq U^5$; contradiction. Dans l'autre cas, $\psi(u) \neq 0$ implique $u \in U^4 \subseteq U^5$. Ainsi $n_i(q_i\psi_i - \psi_i)(u) = 0$ pour tout $u \notin U^5$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe W un voisinage de l'identité tel que

$$|\phi_i(zx) - \phi_i(x)| < \frac{\varepsilon}{m(U^3)} \qquad \text{pour tout } x \in G \text{ et tout } z \in W.$$

Soit $V = W \cap U$ et soit $z \in V$. Par une estimation analogue au point a, on obtient facilement que $\big|\phi_i(z^{-1}x) - \phi_i(x)\big| = 0$ pour tout $x \notin U^3$. Alors, par la partie a), l'invariance à gauche de la mesure de Haar et les propriétés 4.7a)-e), on a pour tout $i \in \mathbb{N}$, $q_i \in Q_i$ et $z \in V$.

$$\begin{aligned}
\big|n_i(q_i\psi_i - \psi_i)(uz) - n_i(q_i\psi_i - \psi_i)(u)\big| &= n_i\big|\psi_i(q_i^{-1}uz) - \psi_i(uz) - (\psi_i(q_i^{-1}u) - \psi_i(u))\big| \\
&= n_i\left|\int \big(\phi_i(q_i^{-1}uzx) - \phi_i(uzx)\big)\phi_i(x)\,\mathrm{d}x - \int \big(\phi_i(q_i^{-1}ux) - \phi_i(ux)\big)\phi_i(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= n_i\left|\int \big(\phi_i(q_i^{-1}ux) - \phi_i(ux)\big)\phi_i(z^{-1}x)\,\mathrm{d}x - \int \big(\phi_i(q_i^{-1}ux) - \phi_i(ux)\big)\phi_i(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq n_i \int \big|\phi_i(q_i^{-1}ux) - \phi_i(ux)\big|\,\big|\phi_i(z^{-1}x) - \phi_i(x)\big|\,\mathrm{d}x \\
&\leq n_i \frac{1}{n_i}\int_{U^3} \big|\phi_i(z^{-1}x) - \phi_i(x)\big|\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{m(U^3)} m(U^3) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre l'équicontinuité uniforme à droite. En concidérant $z \in u^{-1}Vu$, on voit également l'équicontinuité à gauche $\big|n_i(q_i\psi_i - \psi_i)(zu) - n_i(q_i\psi_i - \psi_i)(u)\big| < \varepsilon$.

Il reste à montrer que la suite est uniformément bornée. Puisque $\phi_i(x) = 0$ pour tout $x \notin U^2$, il s'ensuit que

$$|n_i(q_i\psi_i - \psi_i))(u)| \leq n_i \int |\phi_i(q_i^{-1}ux) - \phi_i(ux)|\,\phi_i(x)\,\mathrm{d}x \leq n_i \frac{1}{n_i}\int \phi_i(x)\,\mathrm{d}x \leq m(U^2).$$

Donc, $m(U^2)$ est une borne uniforme de $(n_i(q_i\psi - \psi))_{i\in\mathbb{N}}$ par rapport à $n_i \in \mathbb{N}$ et $q_i \in Q_i$.

□

Proposition 4.12 *La suite $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente vers un élément ϕ dans $\mathscr{C}_c(G)$. Si $(\phi_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est cette sous-suite, alors $(\psi_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément ψ dans $\mathscr{C}_c(G)$. De plus*

$$\psi(u) = \int \phi(ux)\phi(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{pour tout } u \in G.$$

Démonstration. Par la proposition 4.10, la suite $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est équicontinue. De plus, elle est uniformément bornée par 1. Par le théorème d'Arzéla-Ascoli et la proposition 2.9, elle admet une sous-suite $(\phi_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente vers un élément ϕ dans $\mathscr{C}_c(G)$.

Pour montrer la proposition, il suffit de montrer que la sous-suite $(\psi_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction

$$G \to G: \ u \mapsto \int \phi(ux)\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Vu que $(\phi_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge, il existe un entier $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x\in G} |\phi_{p_i}(x) - \phi(x)| < \frac{\varepsilon}{2\,m(U^2)} \quad \text{pour tout } i \geq i_0.$$

Soit $i \geq i_0$, alors

$$\begin{aligned}
\left|\psi_{p_i}(u) - \int \phi(ux)\phi(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int \phi_{p_i}(ux)\phi_{p_i}(x)\,\mathrm{d}x - \int \phi_{p_i}(ux)\phi(x)\,\mathrm{d}x\right.\\
&\qquad \left. + \int \phi_{p_i}(ux)\phi(x)\,\mathrm{d}x - \int \phi(ux)\phi(x)\,\mathrm{d}x\right|\\
&\leq \int \phi_{p_i}(ux)\big|\phi_{p_i}(x) - \phi(x)\big|\,\mathrm{d}x + \int \big|\phi_{p_i}(ux) - \phi(ux)\big|\,\phi(x)\,\mathrm{d}x\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\,m(U^2)}\int \phi_{p_i}(ux)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2\,m(U^2)}\int \phi(x)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

puisque ϕ_{p_i} et ϕ sont ≤ 1 et s'annulent en dehors de U^2 (propriété 4.7(d)). □

Lemme 4.13 *Soit ϕ la limite de $(\phi_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente de $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et soit $x \in G$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(a) $\phi(x) = 1$,
(b) il existe $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de G avec $\lim_{i\to\infty} y_i = x$ et $\lim_{i\to\infty} \Delta_{p_i}(y_i) = 0$.

Démonstration. (b)⇒(a). Soit $1 > \varepsilon > 0$. Par continuité de la fonction ϑ, il existe un voisinage symétrique V de l'identité tel que $\vartheta(z) > \sqrt{1-\varepsilon}$ pour tout $z \in V$. Puisque $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers x, il existe un entier $i_1 \in \mathbb{N}$ tel que $y_i^{-1}x \in V$ pour tout $i \geq i_1$. Étant donné que $(\Delta_{p_i}(y_i))_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe un entier $i_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$1 - \Delta_{p_i}(y_i) > \sqrt{1-\varepsilon} \qquad \text{pour tout } i \geq i_2.$$

Ainsi, pour tout $i \geq \max\{i_1, i_2\}$,

$$1 - \varepsilon < (1 - \Delta_{p_i}(y_i))\vartheta(y_i^{-1}x) \leq \sup_{y\in G}(1 - \Delta_{p_i}(y))\vartheta(y^{-1}x) = \phi(x) \leq 1$$

Ceci démontre que $\phi(x) = 1$.

(a)⇒(b). Par hypothèse,

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{y\in G}(1 - \Delta_{p_i}(y))\vartheta(y^{-1}x) = 1.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un entier n_k qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\sup_{y\in G}(1 - \Delta_{p_i}(y))\vartheta(y^{-1}x) > 1 - 2^{-k} \quad \text{pour tout } i \geq n_k \quad \text{et} \quad n_k \geq k.$$

En particulier, il existe $y_k \in G$ tel que

$$(1 - \Delta_{p_k}(y_k))\vartheta(y_k^{-1}x) > 1 - 2^{-k}. \tag{11}$$

Puisque la suite $(\vartheta(y_k^{-1}x))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, elle admet une sous-suite convergente vers 1 (par passage à la limite dans (11)). Puisque ϑ s'annule en dehors du compact U, on peut aussi supposer que $(y_k^{-1}x)_{k\in\mathbb{N}}$ est contenue dans U après avoir renommé les éléments, et admet donc une sous-suite convergente vers un élément z dans G. Après avoir renommé les éléments une dernière fois, on peut supposer $\lim_{i\to\infty} y_k^{-1}x = z$. Il s'ensuit que $\lim_{k\to\infty} \vartheta(y_k^{-1}x) = \vartheta\big(\lim_{k\to\infty} y_k^{-1}x\big) = \vartheta(z) = 1$ car ϑ est continue et donc $\lim_{k\to\infty} y_k = x$ car ϑ est propre. Toujours en passant à la limite dans (11), il en découle que la suite $(\Delta_{p_k}(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ceci démontre le point (b). □

Proposition 4.14 *Soit ϕ la limite de $(\phi_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente de $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et soit $\psi : G \to \mathbb{R}$ donné par :*

$$\psi(u) = \int \phi(ux)\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Alors (a) ϕ est propre et (b) ψ est propre.

Démonstration. (a) La démonstration est basée sur le fait que U n'admet aucun sous-groupe différent de $\{e\}$. Puisque $\phi_i \leq 1$ pour tout i, il s'ensuit que $\phi(x) \leq 1$ pour tout $x \in G$. Il suffit alors de montrer que l'ensemble $S = \{x \in G \,|\, \phi(x) = 1\}$ est un sous-groupe de U. Soient $x, \bar{x} \in S$. Par le lemme 4.13, il existe $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\bar{y}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux suites de G qui convergent respectivement vers x et $\bar{x}$, et telles que

$$\lim_{i\to\infty} \Delta_{p_i}(y_i) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{i\to\infty} \Delta_{p_i}(\bar{y}_i) = 0$$

Alors $(y_i\bar{y}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $x\bar{x}$ et donc

$$\lim_{i\to\infty} \Delta_{p_i}(y_i\bar{y}_i) \leq \lim_{i\to\infty} \big(\Delta_{p_i}(y_i) + \Delta_{p_i}(\bar{y}_i)\big) = \lim_{i\to\infty} \Delta_{p_i}(y_i) + \lim_{i\to\infty} \Delta_{p_i}(\bar{y}_i) = 0.$$

Ainsi, $x\bar{x} \in S$. D'autre part, puisque $(y_i^{-1})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers x^{-1} et que $\Delta_{p_i}(y_i^{-1}) = \Delta_{p_i}(y_i)$ il s'ensuit que $x^{-1} \in S$.

(b) Soit $u \in G$. L'inégalité $\psi(u) \leq \psi(e)$ découle de l'inégalité de Cauchy-Schwartz et de l'invariance à gauche de la mesure de Haar :

$$\psi(u)^2 = \left(\int \phi(ux)\phi(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int \phi(ux)^2\,\mathrm{d}x \int \phi(x)^2\,\mathrm{d}x = \left(\int \phi(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^2 = \psi(e)^2.$$

Soit $u \in G$ tel que $\psi(u) = 1$. Il faut montrer que $u = e$. L'inégalité précédente est une égalité et il existe donc un nombre réel λ tel que

$$\phi(ux) = \lambda\phi(x) \quad \text{pour tout } x \in G.$$

En particulier, cette expression évaluée en $x = e$ puis en $x = u^{-1}$ donne respectivement $\phi(u) = \lambda$ et $1 = \lambda\phi(u^{-1})$. D'où $1 = \phi(u)\phi(u^{-1})$. Puisque chacun des facteurs est inférieur ou égal à 1, il s'ensuit que $\phi(u) = 1$ et donc que $u = e$ car ϕ est propre.

□

4.3 Un résultat crucial : i/n_i est borné

Toutes les constructions faites jusqu'à présent étaient basées sur l'existence d'ensemble Q_i aux propriétés convenables. Nous pouvons désormais en donner une définition précise et concrète dans le cadre des groupes topologiques avec l'objectif d'appliquer le théorème 4.3 à une famille convenables de fonctions.

Dans ce paragraphe, G désigne un groupe localement compact NSS non-discret, U un voisinage canonique, ϑ une fonction propre continue sur G à valeur dans $[0, 1]$ et qui s'annule en dehors de U. La suite de nombres $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et les suites de fonctions $(\Delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont celles associées aux ensembles Q_i définis ci-après.

Définition 4.11 Pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit $Q_i = \{x \in G \,|\, x \in U, x^2 \in U, \ldots, x^i \in U\}$.

Proposition 4.15 *(a) La suite $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*
(b) $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ forme une base dénombrable de voisinages compacts de l'identité.
(c) Q_i est admissible pour U.

Démonstration. (a) $\{x \in G \,|\, x \in U, x^2 \in U, \ldots, x^i \in U\} \subseteq \{x \in G \,|\, x \in U, x^2 \in U, \ldots, x^{i-1} \in U\}$.
(b) Soit $f_i : G \to G$, $f_i(x) = x^i$. Clairement f_i est continue et donc $f_i^{-1}(U)$ est un voisinage de l'identité car U l'est. Puisque $Q_i = f_1^{-1}(U) \cap \cdots \cap f_i^{-1}(U)$, il s'ensuit que les Q_i sont des voisinages de l'identité, fermés et contenus dans U, donc compacts.

Soit V un voisinage de l'identité. Il faut montrer que $Q_i \subseteq V$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$. Supposons le contraire. Il existe alors une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de G telle que $x_i \in Q_i$ et $x_i \notin V$. Puisque cette suite est

contenue dans le compact U, elle admet une sous-suite convergente $(x_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ vers un élément $z \in U$. Nécessairement, $z \neq e$. Soit $q \in \mathbb{N}$. Alors z^q est la limite de la suite $(x_{p_i}^q)_{i\in\mathbb{N}}$. Or, puisque $x_{p_i} \in Q_{p_i}$ pour tout $p_i \geq q$, il s'ensuit que $x_{p_i}^q \subseteq U$ et donc $z^q \in U$. Par suite, U contient le sous-groupe engendré par z, ce qui est impossible.
(c) Par construction, on a $e \in Q_i \subseteq U$ et $Q_i = Q_i^{-1}$. Si $Q_i = \{e\}$, alors G serait discret par le point précédent. Le sous-groupe engendré par Q_i n'est pas contenu dans U, sinon ce dernier contiendrait le groupe cyclique engendré par n'importe quel élément non nul de Q_i. □

Définition 4.12 Soient G un groupe localement compact NSS, U un voisinage canonique, $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$, ϑ, $(\Delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ comme précédemment. Soient
(a) $\hat{\Phi}$ l'ensemble des sous-suites convergentes de $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$,
(b) Φ l'ensemble des limites d'éléments de $\hat{\Phi}$
(c) Ψ l'ensemble des fonctions définies par $\psi(u) = \int \phi(ux)\phi(x)\,\mathrm{d}x$ où ϕ parcourt Φ.
Soient $\psi \in \Psi$ et $\phi \in \Phi$ tel que $\psi(u) = \int \phi(ux)\phi(x)\,\mathrm{d}x$. On dit qu'une sous-suite $(\psi_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est associée à ψ si $(\phi_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers ϕ.

On rappelle que n_i est donnée par $n_i = \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, Q_i^n \not\subseteq U\}$.

Théorème 4.16 *La suite* $(i/n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $(i/n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Ceci conduira à une contradiction.

I. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $c_i \in Q_i^{n_i}$ avec $c_i \notin U$. L'élément c_i s'écrit comme un produit de n_i termes, chacun dans Q_i. Soit $a_i \in Q_i$ l'un des éléments qui maximise la quantité $\|a_i\psi_i - \psi_i\|$. En appliquant plusieurs plusieurs fois l'estimation $\|abf - f\| \leq \|abf - af\| + \|af - f\| = \|bf - f\| + \|af - f\|$, on obtient
$$\|c_i\psi_i - \psi_i\| \leq n_i\,\|a_i\psi_i - \psi_i\| \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}. \tag{12}$$
Par construction, la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers l'identité.

II. Par l'hypothèse absurde, $(i/n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(r_i/n_{r_i})_{i\in\mathbb{N}}$ strictement croissante vers l'infini.

III. Par la proposition 4.12, $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(\phi_{q_i})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente vers un élément ϕ. Par la proposition 4.14, ϕ est propre. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, soient
$$p_i' = \min\left\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \in \{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}, n \geq r_i\right\} \quad p_i = \min\left\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \in \{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}, n \geq p_i'\right\}.$$
De cette façon, on obtient une suite $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ croissante vers l'infini et telle que $(\phi_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers ϕ et telle que $(p_i/n_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est monotone croissante vers l'infini. Clairement, $n_{p_i} \leq p_i$. Sinon, $n_{p_i} > p_i$ impliquerait que la suite $(p_i/n_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est borné supérieurement.

IV. Soient à nouveau les éléments $a_{p_i} \in Q_{p_i}$ du point I). Puisque $(a_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers l'identité et que
$$\{a_{p_i}, a_{p_i}^2, \ldots, a_{p_i}^{p_i}\} \subseteq U, \quad \text{et} \quad \{a_{p_i}, a_{p_i}^2, \ldots, a_{p_i}^{n_{p_i}}\} \subseteq U,$$
il s'ensuit que $(a_{p_i}, p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(a_{p_i}, n_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ sont des suites standards par rapport à U. Par la proposition 3.15 page 15, elle admet une sous-suite convergente vers un sous-groupe à un paramètre Z. Pour ne pas alourdir les notations, on conserve la même notation pour cette sous-suite.

V. *Assertion :* $Z = \mathbf{0}$. Soit un nombre réel $\rho > 0$ fixé et soit V un voisinage de l'identité. Le théorème 3.13 appliqué à la suite $(a_{p_i}, p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et au voisinage V montre qu'il existe un nombre réel $s_0 > 0$ tel que
$$a_{p_i}^{[sp_i]} \in V \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N} \text{ et tout } 0 \leq s < s_0.$$
Puisque $(n_{p_i}/p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe un indice $i_\rho \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{\rho n_{p_i}}{p_i} < s_0$ pour tout $i \geq i_\rho$. Donc
$$a_{p_i}^{\left[\frac{\rho n_{p_i}}{p_i} p_i\right]} \in V, \quad a_{p_i}^{[\rho n_{p_i}]} \in V \quad \text{pour tout } i \geq i_\rho.$$
Comme le nombre ρ et le voisinage V ont été arbitrairement choisi, il s'ensuit que $(a_{p_i}, n_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{0}$.

Le support des fonctions $n_i(a_i\psi_i - \psi_i)$ est compris U^5 et la suite $\big(n_i(a_i\psi_i - \psi_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ est équicontinue et uniformément bornée. Il en est de même pour $(n_{p_i}(a_{p_i}\psi_{p_i} - \psi_{p_i}))_{i\in\mathbb{N}}$. Le théorème 4.3 s'applique à cette dernière suite. Cette suite converge vers $D_Z\psi$. Mais

$$D_Z\psi(x) = \lim_{h\to 0} \frac{Z(h)\psi(x) - \psi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \quad \text{pour tout } x \in G.$$

Par (12),

$$\lim_{i\to\infty} \|c_{p_i}\psi_{p_i} - \psi_{p_i}\| \le \lim_{i\to\infty} n_{p_i} \|a_{p_i}\psi_{p_i} - \psi_{p_i}\| = \left\| \lim_{i\to\infty} n_{p_i}(a_{p_i}\psi_{p_i} - \psi_{p_i}) \right\| = \|D_Z\psi\| = 0.$$

Ainsi, si c est un point d'accumulation de $\{c_{p_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, ceci impliquerait $c\psi = \psi$. En particulier $c = e$ puisque $\psi(e) = 1$. C'est une contradiction car $c_{p_i} \notin U$ et donc $c \neq 1$. $\square$

4.4 Existance d'une fonction propre différentiable

Dorénavant et pour tout le reste du texte, G est un groupe topologique localement compact NSS non discret. On reprend les mêmes notations du paragraphe précédent.

Proposition 4.17 *Soient $q_i \in Q_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.*
a) Les fonctions $i(q_i\psi_i - \psi_i)$ s'annulent en dehors de U^5.
b) La suite $(i(q_i\psi_i - \psi_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est équicontinue et uniformément bornée par rapport à i et aux $q_i \in Q_i$.

Démonstration. Le point a) a déjà été montré (proposition 4.11(a)). Par le théorème précédent, il existe un réel $M_1 > 0$ tel que $\frac{i}{n_i} \le M_1$. Par la proposition 4.11, il existe $M_2 > 0$ tel que $|n_i(q_i\psi_i(x) - \psi_i(x))| < M_2$. Ainsi

$$|i(q_i\psi_i(x) - \psi_i(x))| = \tfrac{i}{n_i}\, |n_i(q_i\psi_i(x) - \psi_i(x))| \le M_1M_2$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$, tout $q_i \in Q_i$ et tout $x \in G$; montrant que $(i(q_i\psi_i - \psi_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée.

Il reste à montrer que cette suite est équicontinue. Soit $\varepsilon > 0$. Par la proposition 4.11(b), il existe V un voisinage de l'identité tel que

$$|n_i(q_i\psi_i(xz) - \psi_i(xz)) - n_i(q_i\psi_i(x) - \psi_i(x))| < \tfrac{\varepsilon}{M_1} \quad \text{pour tout } z \in V \text{ et tout } i \in \mathbb{N}.$$

Donc, pour tout $z \in V$ et tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &|i(q_i\psi_i(xz) - \psi_i(xz)) - i(q_i\psi_i(x) - \psi_i(x))| \\ &\qquad \le \tfrac{i}{n_i}\, |n_i(q_i\psi_i(xz) - \psi_i(xz)) - n_i(q_i\psi_i(x) - \psi_i(x))| < M_1 \tfrac{\varepsilon}{M_1} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

On rappel que K_1 le sous-ensemble sous-groupes à un paramètre X avec $X(t) \in U$ pour $|t| \le 1$. Une fonction $f \in \mathscr{C}_c(G)$ est différentiable si D_Xf existe pour tout $X \in K_1$.

Nous sommes enfin en mesure de montrer l'existence du fonction propre différentiable. En premier lieu, il faut remarquer qu'un sous-groupe à un paramètre $X \in K_1$ est naturellement associé à une suite standard.

Proposition 4.18 *Soient $X, Y \in K_1$ tels que $X(1) = Y(1)$. Alors $X = Y$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $X(r) = Y(r)$ pour tout $r \ge 0$. Puisque

$$X(\tfrac{1}{2})^2 = X(1) = Y(1) = Y(\tfrac{1}{2})^2,$$

il s'ensuit que $X(\frac{1}{2}) = Y(\frac{1}{2})$ par unicité de la racine dans U. Par suite, X et Y coïncident sur l'ensemble des nombres de la forme $s = m/2^d$ $(0 \le m \le 2^d)$. Soient $r \in (0,1)$ quelconque, V un voisinage de l'identité et V_0 un voisinage symétrique avec $V_0^2 \subseteq V$. Par continuité de X et Y, il existe $\delta > 0$ tel que $X(t), Y(t) \in V_0$ pour $|t| < \delta$. Il existe un nombre s comme ci-dessus tel que $r - s < \delta$. Alors $X(r) = X(r-s)X(s)$ et $Y(r) = Y(r-s)X(s)$ puisque $X(s) = Y(s)$. Donc

$$Y(r)X(r)^{-1} = Y(r-s)X(r-s)^{-1} \in V_0^2 \subseteq V.$$

Ainsi, $X(r) = Y(r)$ pour tout $r \in [0,1]$. Soit $r > 0$. Comme $X(r) = X(r-[r])X(1)^{[r]} = Y(r-[r])Y(1)^{[r]} = Y(r)$, il s'ensuit que $X = Y$. $\square$

Proposition 4.19 *Soit $X \in K_1$. Alors $\big(X(\frac{1}{i}), i\big)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite standard qui converge vers X.*

Démonstration. Puisque $X \in K_1$, $X(\frac{1}{i})^d = X(\frac{d}{i}) \in U$ pour tout entier $1 \leq d \leq i$; et donc $(X(\frac{1}{i}), i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite standard de module 1. Par le théorème 3.9, cette suite converge vers un sous-groupe à un paramètre Y. Mais

$$Y(1) = \lim_{i\to\infty} X(\tfrac{1}{i})^i = \lim_{i\to\infty} X(1) = X(1).$$

Donc $X = Y$ par la proposition précédente. □

Théorème 4.20 *Toute fonction $\psi \in \Psi$ (définition 4.12) est propre et différentiable.*

Démonstration. Soit $\psi \in \Psi$ et $(\psi_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ associée à ψ. Par la proposition 4.14, ψ est propre. Soient $X \in K_1$ et $a_i = X(\frac{1}{i})$. Alors $a_i \in Q_i$ et $(a_i, i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite standard (de module $k = 1$) qui converge vers X. Par la proposition 4.17, $\big(i(a_i\psi_i - \psi_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ est équicontinue, uniformément bornée et s'annule en dehors de U^5. Il en est de même pour $\big(p_i(a_{p_i}\psi_{p_i} - \psi_{p_i})\big)_{i\in\mathbb{N}}$. Le théorème 4.3 page 18 est applicable pour cette seconde suite. Il stipule que ψ est différentiable et que la limite de cette dernière suite converge vers $D_X\psi$. □

Il est opportun d'énoncer dès à présent une propriété des fonctions $\psi \in \Psi$ pour finalement associer une structure d'espace aux sous-groupe à un paramètre L. On rappel que K_1 est l'ensemble des sous-groupes à un paramètre X qui satisfont à $X(t) \in U$ pour tout $|t| \leq 1$.

Lemme 4.21 *Soit $\psi \in \Psi$. Alors $\{D_X\psi \,|\, X \in K_1\}$ est une famille de fonctions uniformément bornée et équicontinue de $\mathscr{C}_c(G)$ et dont les supports sont tous compris dans un seul et même compact.*

Démonstration. Soient $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions associée à $\psi \in \Psi$. Par définition, $X(\frac{1}{i}) \in Q_i$ pour tout $X \in K_1$. En posant $a_i = X(\frac{1}{i})$, il suit de la remarque 4.19 et du théorème 4.3 que $(i(a_i\psi_i - \psi_i))_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $D_X\psi$. Le fait que cette suite est uniformément borné ne dépend pas de X, mais de la suite bornée $(i/n_i)_{i\in\mathbb{N}}$. De même, l'équicontinuité ne dépend pas des éléments $X(\frac{1}{i}) \in Q_i$. Il en est de même pour les supports de $D_X\psi$. □

5 Structure d'espace vectoriel des sous-groupes à un paramètre

Le but de ce chapitre est de munir l'ensemble des sous-groupes à un paramètre L d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et de montrer que cet espace est de dimension finie. L'action des scalaires sur L a déjà été détaillée (page 17) : $(\lambda X)(r) = X(\lambda r)$. Résumons l'ensemble des notations : G est un groupe localement compact NSS, U un voisinage canonique. Soit $f \in \mathscr{C}_c(G)$ une fonction propre différentiable. Il n'est pas nécessaire de supposer que $f \in \Psi$.

5.1 Somme de deux sous-groupes à un paramètre

Lemme 5.1 *Soient $(a_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux suites standards convergentes vers X et Y respectivement. Alors*
(a) $(a_ib_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite standard convergente vers un sous-groupe à un paramètre Z,
(b) $D_Zf = D_Xf + D_Yf$.

Démonstration. (a) Soit k le minimum des modules des deux suites standards et soit $C > 0$ un entier positif tel que $i/n_i < C$ (théorème 4.16). Il est claire que $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ croît vers l'infini et $(a_ib_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers l'identité dans G. On montre que $(a_ib_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est de module $\frac{k}{2C}$.
On rappel que Q_i est l'ensemble des éléments de G dont les i premières puissances sont dans U. Il suit des définitions que $a_i, b_i \in Q_{[km_i]}$. Ainsi $a_ib_i \in Q^2_{[km_i]} \subseteq U$ et donc $(a_ib_i)^s \in U$ pour tout entier s avec $2s < n_{[km_i]}$. En effet, $n_{[km_i]}$ est le plus petit exposant pour lequel $Q^{n_{[km_i]}}_{[km_i]} \not\subseteq U$. Il suffit alors de montrer que

$$\left[\frac{km_i}{2C}\right] \leq \frac{n_{[km_i]}}{2}. \tag{13}$$

Par définition de C, d'une part $\frac{[km_i]}{C} \leq n_{[km_i]}$, et d'autre part, puisque $2C\left[\frac{km_i}{2C}\right]$ est entier,

$$2C\left[\frac{km_i}{2C}\right] \leq 2C\frac{km_i}{2C} = km_i \quad \Rightarrow \quad 2C\left[\frac{km_i}{2C}\right] \leq [km_i].$$

L'assertion (13) suit.
(b) Soit f une fonction différentiable. Il faut montrer que $\big(m_i(a_ib_if - f)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction définie par $D_Zf = D_Xf + D_Yf$. Par continuité de la translation $(a, f) \mapsto a.f$,

$$\begin{aligned} D_Zf &= \lim_{i\to\infty} m_i(a_ib_if - f) = \lim_{i\to\infty}\big(a_i\big(m_i(b_if - f)\big) + m_i(a_if - f)\big) \\ &= \Big(\lim_{i\to\infty} a_i\Big)\Big(\lim_{i\to\infty} m_i(b_if - f)\Big) + \Big(\lim_{i\to\infty} m_i(a_if - f)\Big) = D_Xf + D_Yf. \end{aligned}$$ □

Proposition 5.2 *Soient $X, Y \in$ L et soit $k > 0$. Si la limite*

$$\lim_{i\to\infty}\big(X(\tfrac{1}{i})Y(\tfrac{1}{i})\big)^{[ki]} \tag{14}$$

existe dans G, alors l'application $Z : \mathbb{R} \to G$ donné par

$$Z(r) = \lim_{i\to\infty}\big(X(\tfrac{1}{i})Y(\tfrac{1}{i})\big)^{[ri]} \quad \text{et } Z(-r) = Z(r)^{-1} \text{ pour tout } r \geq 0$$

est un sous-groupe à un paramètre de G.

Démonstration. Par le point (a) du lemme précédent, $\big(X(\frac{1}{i})Y(\frac{1}{i}), i\big)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite standard. Par le théorème 3.14, elle converge si la limite (14) existe. □

Définition 5.1 On note « $X + Y$ » le sous-groupe à un paramètre définit par la proposition précédente.

Lemme 5.3 *Si $X + Y = Z$, alors $D_Zf = D_Xf + D_Yf$.*

Démonstration. Les suites $(X(\frac{1}{i}), i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(Y(\frac{1}{i}), i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des suites standards qui convergent vers X et Y respectivement (proposition 4.19). Le résultat découle du lemme 5.1 appliqué aux suites $a_i = X(\frac{1}{i}), b_i = Y(\frac{1}{i})$. □

Lemme 5.4 *Si $D_X f = 0_G$, alors $X = \mathbf{0}$.*

Démonstration. Soit f une application différentiable propre, par exemple $f \in \Psi$. Soit $F(r) = X(r)f$. Par définition $F'(r) = X(r)D_X f$. Pour tout $x \in G$, soit $g_x(r) = F(r)(x)$. Ainsi

$$g'_x(r) = F'(r)(x) = X(r)D_X f(x) = X(r)0_G(x) = 0_G(X(-r)x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in G.$$

Donc g_x est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ et la constante est la même pour tout $x \in G$. En particulier, $g_x(r) = g_e(0)$, $X(r)f(e) = X(0)f(e) = f(e)$. Et puisque f est propre, $X(-r) = e$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. D'où $X = \mathbf{0}$. □

Lemme 5.5 *$X + Y = \mathbf{0}$ si et seulement si $D_X f + D_Y f = 0_G$.*

Démonstration. Si $X + Y = \mathbf{0}$, alors $D_{X+Y} f = D_{\mathbf{0}} f = 0_G$. Par le lemme 5.3, $D_{X+Y} f = D_X f + D_Y f$. Donc $D_X f + D_Y f = 0_G$. Réciproquement, on suppose $D_X f + D_Y f = 0_G$. Par le lemme 5.1(a), la suite $\big(X(\frac{1}{i})Y(\frac{1}{i}), i\big)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite standard et admet donc une sous-suite convergente vers un élément $Z \in \mathrm{L}$. Alors $D_Z f = D_X f + D_Y f$ par la partie (b) du même lemme. Donc $D_Z f = 0_G$. Par le lemme précédent, $Z = \mathbf{0}$. Il en résulte que toute sous-suite convergente de $\big(X(\frac{1}{i})Y(\frac{1}{i}), i\big)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{0}$. Donc la suite elle-même converge vers $\mathbf{0}$. Ceci démontre que $X + Y = \mathbf{0}$. □

On rappelle que $-X$ est définit par $(-X)(r) = X(-r) = X(r)^{-1}$.

Lemme 5.6 *Si $X + Y = \mathbf{0}$, alors $X = -Y$.*

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{R}$ un nombre réel fixé. Soit $\sigma(x) = Y(-s)xY(s)$ l'automorphisme intérieur de G par $Y(s)$ et soit $X_1 = \sigma \circ X$. On montre que $X_1 + Y$ existe et vaut $\mathbf{0}$. En effet, pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\big\{X_1(\tfrac{1}{i})Y(\tfrac{1}{i})\big\}^{[ti]} &= \big\{Y(-s)X(\tfrac{1}{i})Y(s)Y(\tfrac{1}{i})\big\}^{[ti]} = \big\{Y(-s)X(\tfrac{1}{i})Y(s+\tfrac{1}{i})\big\}^{[ti]} \\
&= \big\{Y(-s)X(\tfrac{1}{i})Y(\tfrac{1}{i})Y(s)\big\}^{[ti]} = Y(-s)\big\{X(\tfrac{1}{i})Y(\tfrac{1}{i})\big\}^{[ti]}Y(s), \\
\text{donc} \quad (X_1+Y)(t) &= \lim_{i\to\infty} Y(-s)\big\{X(\tfrac{1}{i})Y(\tfrac{1}{i})\big\}^{[ti]}Y(s) = Y(-s)\Big(\lim_{i\to\infty}\big\{X(\tfrac{1}{i})Y(\tfrac{1}{i})\big\}^{[ti]}\Big)Y(s) \\
&= Y(-s)\big((X+Y)(t)\big)Y(s) = Y(-s)eY(s) = e = \mathbf{0}(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Par le lemme précédent, $D_{X_1} f = D_X f = -D_Y f = D_{-Y} f$. Soient $r \in \mathbb{R}$, $x \in G$, f une fonction propre différentiable et $F_x(r,s) = X(r)Y(s)f(x)$. Puisque $X_1(r) = Y(s)^{-1}X(r)Y(s)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_x(r,s)}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}\big(Y(s)X_1(r)f(x)\big) = Y(s)X_1(r)D_{X_1}f(x) = -Y(s)X_1(r)D_Y f(x) \\
&= -\frac{\partial}{\partial s}\big(X(r)Y(s)D_Y f(x)\big) = -\frac{\partial F_x(r,s)}{\partial s}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}F_x(r+u, s+u) = 0$ pour tout $x \in G$ et tout $u \in \mathbb{R}$. Ce qui implique que $u \mapsto F_x(r+u, s+u)$ est une fonction constante. En particulier $X(r-s)Y(0)f(x) = (-Y)(r-s)X_1(0)f(x)$ en prenant successivement $u = -s$ et $u = -r$. Puis, pour $t = r - s$ et $x = e$, $X(t)f(e) = ((-Y)(t))f(e)$. Ceci implique $Y(t)X(t) = e$ car f est propre. D'où $X(t) = Y(t)^{-1} = (-Y)(t)$ et donc $X = -Y$. □

Lemme 5.7 *Si $D_X f = D_Y f$, alors $X = Y$.*

Démonstration. Par hypothèse, $D_X f - D_Y f = D_X f + D_{-Y} f = 0_G$. Donc $X + (-Y) = \mathbf{0}$ par le lemme 5.5. Enfin, $X = -(-Y) = Y$ par le lemme précédent. □

Lemme 5.8 *Soient $X, Y \in \mathrm{L}$. Alors (i) $X + Y$ existe; (ii) $D_{X+Y} f = D_X f + D_Y f$; (iii) $X + Y = Y + X$.*

Démonstration. On emploie à nouveau le principe de la proposition 3.5 page 10. Par le lemme 5.1, $\big(X(\frac{1}{i})Y(\frac{1}{i}), i\big)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite standard et admet donc toutes ses sous-suites admettent des sous-suites convergente. Soient Z_1, Z_2 les limites de deux d'entre-elles. Alors $D_{Z_1} f = D_X f + D_Y f = D_{Z_2} f$ par le lemme 5.3 et donc $Z_1 = Z_2$ par le lemme précédent. Ceci démontre que la suite standard initialement considérée converge vers $X+Y$. La seconde assertion est immédiate d'après le lemme 5.3. Enfin, comme $D_{X+Y}f = D_X f + D_Y f = D_Y f + D_X f = D_{Y+X} f$, on a $X+Y = Y+X$ d'après le lemme précédent. □

Arrivé à ce point, il est aisé de vérifier que les autres axiomes d'espace vectoriel sont satisfaits. Mentionnons seulement la distributivité des scalaires $(\lambda_1+\lambda_2)X = \lambda_1 X + \lambda_2 X$:

$$D_{(\lambda_1+\lambda_2)X} f = (\lambda_1+\lambda_2) D_X f = \lambda_1 D_X f + \lambda_2 D_X f = D_{\lambda_1 X} f + D_{\lambda_2 X} f = D_{\lambda_1 X + \lambda_2 X} f.$$

Le résultat découle du lemme 5.7.

5.2 Espace vectoriel de dimension finie associée à G

Soit G un groupe NSS localement compact. On résume l'ensemble des éléments accumulés jusqu'ici :

- U un voisinage canonique;
- L l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de G;
- $K_1 = \{X \in \mathrm{L} \mid X(t) \in U \text{ pour tout } |t| \leq 1\}$;
- $K = \{X(1) \in \mid X \in K_1\}$;
- $f \in \mathscr{C}_c(G)$ une fonction propre continue différentiable telle que $\{D_X f \mid X \in K_1\}$ est uniformément borné et équicontinu (une telle fonction existe par le lemme 4.21).

Lemme 5.9 *K est fermé dans G.*

Démonstration. Soit $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de K convergente vers un élément $a \in G$. Il faut montrer que $a \in K$. Il existe $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de L avec $c_i = X_i(1)$ et $X_i(t) \in U$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $|t| \leq 1$. Soit $a_i = X_i(\frac{1}{i})$ et $m_i = i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Alors les suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ satisfont aux conditions du théorème 3.10 page 13 et définissent donc un sous-groupe à un paramètre X qui satisfait à

$$X(1) = \lim_{i\to\infty} a_i^{m_i}.$$

Puisque $a_i^{[tm_i]} \in U$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $|t| \leq 1$, il s'ensuit que $X(t) \in U$ et donc $X \in K$. Par ailleurs,

$$a = \lim_{i\to\infty} c_i = \lim_{i\to\infty} X_i(1) = \lim_{i\to\infty} X_i(i\tfrac{1}{i}) = \lim_{i\to\infty} X_i(\tfrac{1}{i})^i = \lim_{i\to\infty} a_i^i = X(1)$$

et donc $a \in K$. Ceci démontre que K est fermé. □

Définition 5.2 Soit $E : \mathrm{L} \to G$ l'application $E(X) = X(1)$. Soit E_1 la restriction de E à K_1.

Cette application est l'analogue de l'exponentielle usuelle pour les groupes de Lie.

Lemme 5.10 *L'application $E_1 : K_1 \to K$ est une bijection.*

Démonstration. Par définition, $K_1 = E_1(K)$ et donc E_1 est surjective. Si $E_1(X) = E_1(Y)$, alors $X = Y$ par la proposition 4.18. □

Lemme 5.11 *L'application $K \to \mathscr{C}_c(G)$ définie par $x \mapsto D_{E_1^{-1}(x)} f$ est continue.*

Démonstration. Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de K convergente vers un élément $x \in K$ et soient $X_i, X \in K_1$ les sous-groupes à un paramètre correspondants : $x_i = X_i(1)$, $x = X(1)$. Il faut montrer que $(D_{X_i} f)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $D_X f$. Par hypothèse sur f (lemme 4.21, page 28), on peut supposer que cette suite converge vers une fonction g en employant les arguments habituels (théorème d'Arzéla-Ascoli, unicité de la limite). Il suffit donc de montrer que $g = D_X f$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $i_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|D_{X_i} f - g\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } i \geq i_1.$$

Par définition de la dérivée $D_{X_i} f$, pour tout $i \in \mathbb{N}$ fixé, il existe un entier m_i assez grand tel que

$$\left\| m_i \left((X_i(\tfrac{1}{m_i}) f - f) \right) - D_{X_i} f \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après les mêmes considérations que les chapitres précédents, $\left(X_i(\frac{1}{m_i}), m_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite standard convergente vers X : en effet,

$$\lim_{i\to\infty} X_i(\tfrac{1}{m_i})^{m_i} = \lim_{i\to\infty} X_i(1) = X(1).$$

Le théorème 4.3 page 18 s'applique avec $f_i = f$. Ce résultat stipule qu'il existe $i_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|m_i\left((X_i(\tfrac{1}{m_i})f - f)\right) - D_X f\right\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } i \geq i_2.$$

Au final, pour tout $i \geq \max\{i_1, i_2\}$:

$$\|D_X f - g\| \leq \left\|D_X f - m_i\left((X_i(\tfrac{1}{m_i})f - f)\right)\right\| + \left\|m_i\left((X_i(\tfrac{1}{m_i})f - f)\right) - D_{X_i} f\right\| + \|D_{X_i} f - g\| < \varepsilon. \quad \square$$

Définition 5.3 Soit M le $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_c(G)$ engendré par $\{D_X f \mid X \in K_1\}$.

Lemme 5.12 *L'image de K par $x \mapsto D_{E_1^{-1}(x)} f$ est un voisinage de 0_G dans M.*

Démonstration. Si tel n'est pas le cas, il existe $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{L} \setminus K_1$ telle que $(D_{X_i} f)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_G. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe un réel $\lambda_i < 1$ tel que $X_i(\lambda_i) \in \partial U$ et $X_i(t) \in U$ pour tout $|t| < \lambda_i$. Soit $x_i = X_i(\lambda_i)$. Notons que si $|t| \leq 1$, alors $\lambda_i X_i(t) = X_i(\lambda_i t) \in U$, donc $x_i \in K$ et $\lambda_i X_i \in K_1$.

Par le lemme 5.9, K est fermé et contenu dans U, donc compact dans G. En considérant l'image des x_i dans K_1, on peut supposer par les arguments usuels que la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $x \in K$. Alors $x \neq e$ puisque les éléments de ladite suite sont sur le bord du voisinage U. Soit $X \in K_1$ l'image de x. Par le lemme précédent, la suite $(D_{E_1^{-1}x_i} f)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $D_{E_1^{-1}x} f$. Comme les λ_i sont bornés et que $D_{\lambda_i X_i} f = \lambda_i D_{X_i} f$, il s'ensuit que $D_X f = 0_G$. Donc $X = \mathbf{0}$ par le lemme 5.4. C'est impossible car $x \neq e$. $\square$

À l'aide d'un dernier résultat classique d'analyse fonctionnelle démontré dans l'annexe page 41, on est en mesure de démontrer le résultat visé.

Théorème *Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé localement compact est de dimension finie.*

Théorème 5.13 *Soit G un groupe localement compact* NSS*. Alors* $\mathrm{L}(G)$ *est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Si G n'est pas discret, alors* $\dim \mathrm{L}(G) > 0$*.*

Démonstration. Par les deux lemmes précédents, l'image de K dans M est un voisinage compact de 0_G, donc M est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel localement compact. Par le théorème cité ci-dessus, M est de dimension finie. Soit $(D_{X_1} f, \ldots, D_{X_d} f)$ une base de cet espace et soit $X \in \mathrm{L}$. Il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda X \in K_1$. Donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ avec $\lambda X = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_d X_d$. Donc X est une combinaison linéaire des X_i, ce qui montre que L est de dimension finie. Si G n'est pas discret, alors $\mathrm{L}(G) \neq \{\mathbf{0}\}$ par le corollaire 3.11 page 13. $\square$

5.3 Structure localement euclidienne

On a vu au chapitre précédent l'importance des ensembles K et K_1. Cette partie du texte est destinée à démontrer que K est un voisinage de l'identité (lemme 5.27). Ceci servira à identifier un voisinage de l'identité homéomorphe à une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, montrant ainsi que G est localement euclidien.

5.3.1 Compléments sur les suites standards

Lemme 5.14 *Soient deux suites standards $(a_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ convergentes respectivement vers des sous-groupes à un paramètre X et Y. Alors $(a_i b_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite standard convergente vers $X + Y$.*

Démonstration. Par le lemme 5.1 page 29, $(a_i b_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est standard et admet donc une sous-suite convergente vers un élément $Z \in \mathrm{L}$. En utilisant un raisonnement tout à fait identique au lemme 5.7, il suffit de montrer que $Z = X + Y$. Soit k le minimum des modules des suites $(a_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et soit $h_i = [k m_i]$. Ce choix de k permet d'affirmer que a_i, b_i et $a_i b_i \in Q_{h_i}$.

On considère à nouveau les ensembles de fonctions $\phi \in \Phi$, $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{\Phi}$ associées aux constructions $(Q_i, n_i, \Delta_i, \vartheta, \phi_i, \psi_i)$ de la page 26. Puisque $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers ϕ, $(\phi_{h_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge également vers ϕ. Soit $(\phi_{h_i})_{i\in I}$ une sous-suite. Soit $\psi \in \Psi$ l'élément correspondant. Par la proposition 4.17(b) page 27, la suite $(h_i(a_i\psi_{h_i} - \psi_{h_i}))_{i\in\mathbb{N}}$ est équicontinue, uniformément bornée et s'annule en dehors d'un compact fixé. En remarquant que le rapport $[km_i]/m_i$ tends vers k, la même assertion est vérifiée pour $(m_i(a_i\psi_{h_i} - \psi_{h_i}))_{i\in\mathbb{N}}$. On considère la sous-suite $(m_i(a_i\psi_{h_i} - \psi_{h_i}))_{i\in I}$. D'après le théorème sur les dérivée 4.3 page 18, cette suite converge vers $D_X\psi$.

Les mêmes arguments peuvent être répétés et servir à sélectionner des sous-suites $(m_i(b_i\psi_{h_i} - \psi_{h_i}))_{i\in I'}$ et $(m_i(a_ib_i\psi_{h_i} - \psi_{h_i}))_{i\in I''}$ convergentes respectivement vers $D_Y\psi$ et $D_Z\psi$. Finalement, en passant à la limite ($i \in I''$) dans

$$m_i(a_ib_i\psi_{h_i} - \psi_{h_i}) = a_i\left(m_i(b_i\psi_{h_i} - \psi_{h_i})\right) + m_i(a_i\psi_{h_i} - \psi_{h_i}),$$

on obtient $D_Z\psi = D_X\psi + D_Y\psi$, d'où $D_Z\psi = D_{X+Y}\psi$ et $Z = X + Y$ par les lemmes 5.5 et 5.7 □

Soit $f \in \mathscr{C}_c(G)$ une fonction propre différentiable quelconque.

Lemme 5.15 *Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de G convergente vers l'identité et soit $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite croissante vers l'infini. Si $(m_i(a_if - f))_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_G, alors :*

(a) il existe i_0 assez grand tel que $(a_i, m_i)_{i=i_0}^{+\infty}$ est une suite standard,

(b) $(a_i, m_i)_{i=i_0}^{+\infty}$ converge vers $\mathbf{0}$.

Démonstration. (a) Il faut démontrer qu'il existe i_0 tel que $\{a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{m_i}\} \subseteq U$ pour tout $i \geq i_0$. Si tel n'est le cas, il existe des suites d'élements $a_{n_i} \in G$, $t_j \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq t_{n_i} \leq m_i$, $a_{n_i}^{t_{n_i}} \notin U$ et $a_{n_i}^{t_{n_i}-1} \in U$. Par compacité $(a_{n_i}^{t_{n_i}-1})_{i\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente vers un élément $a \in G$. Puisque la suite correspondante de terme $a_{n_i}^{t_{n_i}}$ est hors de U et converge également vers a, il s'ensuit que $a \neq e$. Puisque $(m_i(a_if - f))_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_G, l'estimation suivante

$$\left\|a_{n_i}^{t_j}f - f\right\| \leq t_j\left\|a_{n_i}f - f\right\| \leq m_j\left\|a_{n_i}^{t_j}f - f\right\| = \left\|m_j(a_{n_i}^{t_j}f - f)\right\|$$

montre que $af = f$. Puisque f est propre, on obtient la contradiction que $a = e$.

(b) Il existe une sous-suite convergente de $(a, m_i)_{i=i_0}^{+\infty}$ vers un sous-groupe à un paramètre X. D'après le théorème sur les dérivées 4.3 page 18, $(m_i(a_if - f))_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers D_Xf et par hypothèse $D_Xf = 0_G$. D'après le lemme 5.4 page 30, $0X = \mathbf{0}$. Il en découle que $(a, m_i)_{i=i_0}^{+\infty}$ converge vers $\mathbf{0}$. □

Lemme 5.16 *Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de G convergente vers l'identité et soit $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite croissante vers l'infini. S'il existe un sous-groupe à un paramètre X tel que $(m_i(a_if - f))_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers D_Xf, alors :*

(a) il existe i_0 assez grand tel que $(a_i, m_i)_{i=i_0}^{+\infty}$ est une suite standard,

(b) $(a_i, m_i)_{i=i_0}^{+\infty}$ converge vers X.

Démonstration. La première assertion est immédiate d'après le lemme précédent. Soit $b_i = X(-\frac{1}{m_i})$. Ainsi $(b_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite standard convergente vers $-X$. Puisque $m_i(a_ib_if - f) = a_i(m_i(b_if - f)) + m_i(a_if - f)$, d'après l'hypothèse, on a

$$\lim_{i\to\infty} a_i(m_i(b_if - f)) + m_i(a_if - f) = \left(\lim_{i\to\infty} a_i\right)(-D_Xf) + D_Xf = 0_G.$$

Donc $(a_ib_i, m_i)_{i=i_0}^{+\infty}$ converge vers $\mathbf{0}$ d'après le lemme précédent. Le lemme 5.14 appliqué aux suites $(a_ib_i, m_i)_{i=i_0}^{+\infty}$ et $(b_i^{-1}, m_i)_{i=i_0}^{+\infty}$ montre que $(a_i, m_i)_{i=i_0}^{+\infty}$ est une suite standard convergente vers $(-X + X) + X = X$. □

5.3.2 Topologie sur G, L et M; ensembles K et K_1

Lemme 5.17 *Soient C_0 une partie compacte de $\mathscr{C}_c(G)$, $g \in C_0$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un voisinage compact V de l'identité tel que $\|ag - g\| < \varepsilon$.*

Démonstration. Soit $g \in C_0$ fixé. Par continuité de l'action $(a, f) \mapsto af$ et de la somme dans $\mathscr{C}_c(G)$. puisque $eg - g = 0_G$, il existe V_g un voisinage de l'identité et W_g un voisinage ouvert de g dans $\mathscr{C}_c(G)$ tel que $\|ah - h\| < \varepsilon$ pour tout $(a, h) \in V_g \times W_g$. Puisque $C_0 \subseteq \bigcup_{g \in C_0} W_g$ est un recouvrement ouvert, il admet un sous-recouvrement fini $C_0 \subseteq W_{g_1} \cup \cdots \cup W_{g_d}$. Alors $V = V_{g_1} \cap \cdots \cap V_{g_d}$ convient. □

D'après le paragraphe 5.2, L est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Désormais L de la topologie héritée de $\mathbb{R}^n$ via n'importe quel isomorphisme fixé. Pour le lemme 5.19, ces deux espaces seront identifiés.

Lemme 5.18 *K_1 est un voisinage compact de $\mathbf{0}$ dans* L*.*

Démonstration. D'après la série de lemme du paragraphe 5.1, $\mathrm{L} \to M, X \mapsto D_X f$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension finie. En effet, cette application est surjective par construction et l'injectivité est dû au fait que $D_X f = 0_G$ implique $X = \mathbf{0}$ (lemme 5.4). Puisque $\{D_X f\}_{X \in K_1}$ est un voisinage compact de 0_G dans M (lemme 5.12), il s'ensuit que K_1 est un voisinage compact de $\mathbf{0}$ dans L. □

Lemme 5.19 *Soit $C \subseteq \mathrm{L}$ une partie compacte. Soit V un voisinage symétrique de l'identité dans G. Alors il existe un nombre réel $r > 0$ associé à V tel que*

$$X(t) \in V \quad \textit{pour tout } |t| \leq r \textit{ et tout } X \in C.$$

Démonstration. Il est possible d'identifier provisoirement L avec $\mathbb{R}^n$ munit de sa norme euclidienne. D'après le lemme précédent, K_1 est un voisinage de $\mathbf{0}$ et donc K_1 contient une boule ouverte $B_\rho(\mathbf{0})$ de rayon $\rho > 0$ centrée en $\mathbf{0}$. Puisque C est fermé et borné, il existe $R > 0$ tel que $B \subseteq [-R, R]^n$ ($n = \dim \mathrm{L}$). Soit $s = \frac{\rho}{R}$. Alors $sC \subseteq K_1$. En effet,

$$sX = \rho \tfrac{1}{R} X \in \rho B_1(\mathbf{0}) = B_\rho(\mathbf{0}) \subseteq K_1 \quad \text{pour tout } X \in C.$$

Par ailleurs, puisque les Q_i forment une base de voisinage de l'identité (décroissante), il existe un entier $i \geq s$ tel que $Q_i \subseteq V$. Alors $r = \frac{s}{i}$ convient. En effet, soient $X \in C$ et $|t| \leq r$. Alors $(ir)X = sX \in K_1$ et donc pour entier $j = 1, \ldots, i$, on a $X(t)^j = X(jt) = sX(\alpha) \in U$ où $\alpha \in (0, 1)$. Donc $X(t) \in Q_i \subseteq V$ pour tout $X \in C$. □

Lemme 5.20 *Soit $C \subseteq \mathrm{L}$ une partie compacte et soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Alors il existe un réel $r > 0$ tel que*

$$\left\| \frac{X(h)f - f}{h} - D_X f \right\| < \varepsilon \quad \textit{pour tout } X \in C \textit{ et tout } h \textit{ avec } 0 < h \leq r.$$

Démonstration. Soit $C_0 = \{D_X f \mid X \in C\} \subseteq M$. Cet ensemble est l'image du compact C par l'application continue $X \mapsto D_X f$. Donc C_0 est une partie compact de M. Soit $\varepsilon > 0$. Par le lemme 5.17, il existe un voisinage de l'identité symétrique V associé au compact C_0 tel que

$$\left\| aD_X f - D_X f \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } a \in V.$$

Par le lemme précédent, il existe un nombre $r > 0$ associé à V tel que $X(t) \in V$ pour tout $|t| \leq r$. Soit $0 < h \leq r$ et $X \in C$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ assez grand tel que, si $s = \frac{h}{m}$, alors

$$\left\| \frac{X(s)f - f}{s} - D_X f \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le résultat découle de l'identité suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{X(h)f - f}{h} - D_X f &= \left(\frac{1}{ms} \sum_{i=0}^{m-1} X((i+1)s)f - X(is)f \right) - D_X f \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{X(is)}{m} \frac{X(s)f - f}{s} \right) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{X(is)}{m} D_X f + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{X(is)}{m} D_X f - D_X f \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{X(is)}{m} \left(\frac{X(s)f - f}{s} - D_X f \right) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{X(is) D_X f - D_X f}{m}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 5.21 *Soit $(a_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite standard convergente vers un élément $X \in \mathrm{L}$ et soit V un voisinage de l'identité. Pour tout nombre réel $R \geq 0$ fixé, il existe un indice $i_0 \in \mathbb{N}$ associé à R et V tel que*

$$X(r)^{-1}a_i^{[rm_i]} \in V \quad \textit{pour tout } i \geq i_0 \textit{ et tout } 0 \leq r \leq R.$$

Démonstration. Supposons le contraire. Soit $r \in [0, R]$ fixé et soit $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers r dans cet intervale. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe un élément de la suite standard tel que $X(r_i)^{-1}a_{n_i}^{[r_i m_{n_i}]} \notin V$.

Soit W un voisinage de l'identité avec $W^5 \subseteq V$. Si $r > 0$, par le théorème 3.6 page 10, il est possible de choisir un réel $0 < s < r$ qui dépend de W, tel que pour i assez grand,

$$a_{n_i}^{[(r_i-s)m_{n_i}]} \in W,$$

d'où

$$\lim_{i\to\infty} a_{n_i}^{[(r_i-s)m_{n_i}]} = X(r)^{-1}X(s) \in W.$$

Si $r = 0$, il suffit de choisir $s = 0$. Par ailleurs, puisque $(a_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite standard, pour tout i assez grand, on a

$$X(s)^{-1}a_{n_i}^{[sm_{n_i}]} \in W.$$

Par continuité de X, on a également

$$X(r_i)^{-1}X(r) \in W.$$

Le produit de ces quatres relations implique $X(r_i)^{-1}a_{n_i}^{[sm_{n_i}]}a_{n_i}^{[(r_i-s)m_{n_i}]} \in W^4$. Mais puisque

$$[r_i m_{n_i}] = [(r_i - s)m_{n_i}] + [sm_{n_i}] + \alpha_i \quad \text{avec } \alpha_i \in \{0, 1\}$$

et que $a_{n_i}^{\alpha_i} \in W$, il s'ensuit que $a_{n_i}^{[sm_{n_i}]}a_{n_i}^{[(r_i-s)m_{n_i}]} \in a_{n_i}^{[r_i m_{n_i}]}W$ et donc $X(r_i)^{-1}a_{n_i}^{[r_i m_{n_i}]} \in W^5 \subseteq V$, ce qui contredit l'assertion du premier paragraphe. □

Action de G sur K

Comme au chapitre 5.2, on considère L munit de la topologie induite par $\mathbb{R}^n$ (via un certain isomorphisme fixée). Soit $L(\mathrm{L})$ l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires sur L munit de la topologie euclidienne de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Définition 5.4 Soit $a \in G$ et soit $S_a : \mathrm{L} \to \mathrm{L}$ l'application donnée par $X \mapsto \{aXa^{-1} : t \mapsto aX(t)a^{-1}\}$.

Cette définition fait sens. En effet, d'une part $S_a(X)$ est un homomorphisme :

$$aX(s+t)a^{-1} = aX(s)X(t)a^{-1} = aX(s)a^{-1}aX(t)a^{-1} \quad \text{pour tout } s, t \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, $S_a(X)$ est continu sur $\mathbb{R}$ par continuité du produit sur G. La linéarité de S_a découle des définitions :

$$\lambda S_a(X)(t) = (aXa^{-1})(\lambda t) = aX(\lambda t)a^{-1} = a(\lambda X(t))a^{-1} = (a(\lambda X)a^{-1})(t) = S_a(\lambda X)(t),$$
$$S_a(X+Y)(t) = a\left(\lim_{i\to\infty}\left\{X(\tfrac{1}{i})Y(\tfrac{1}{i})\right\}^{[ti]}\right)a^{-1} = \lim_{i\to\infty}\left\{aX(\tfrac{1}{i})a^{-1}aY(\tfrac{1}{i})a\right\}^{[ti]} = \left(S_a(X) + S_a(Y)\right)(t).$$

Lemme 5.22 *L'application $G \to L(\mathrm{L})$ donnée par $a \mapsto S_a$ est continue.*

Démonstration. Soit $R(a) = S_a$. Puisque $R(ab)X = abXb^{-1}a^{-1} = \left(R(a)R(b)\right)X$, il suffit de vérifier la continuité de R en e. Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers e. Soit $X \in \mathrm{L}$. Il faut vérifier que $\left(S_{a_i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans $L(\mathrm{L})$ vers l'application définie par $X \mapsto X$, c'est-à-dire id(L).

Supposons dans un premier temps que $S_{a_i}X \in K_1$ pour tout i. Mais puisque $E : K_1 \to K$ est un homéomorphisme de K_1 dans K, il suffit de montrer que $\left(S_{a_i}X(t)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il suffit de le vérifier pour $t = 1$ et d'appliquer la méthode de la proposition 4.19 page 28. Clairement, $(a_iX(1)a_i^{-1})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $X(1)$ dans G.

Soit $X_i \in \mathrm{L}$ quelconque. Il existe un voisinage symétrique de l'identité V avec $V^3 \subseteq U$. Il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_i \in V$ pour tout $i \geq i_0$. Par continuité de X, il existe $r_0 > 0$ tel que $X(t) \in V$ pour tout $|t| \leq r_0$. Il s'ensuit que $r_0X \in K_1$ et donc que $\left(S_{a_i}(r_0X)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers r_0X par le paragraphe précédent. Par continuité, $\left(S_{a_i}X\right)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers X. □

5.3.3 Intégrale à valeur dans un espace vectoriel

Pour les besoins d'un lemme ultérieur, il est nécessaire d'introduire un outil technique, nous le faisons de manière informelle. Soit $C \subseteq G$ une partie compact et soit $F : \mathbb{R} \to \mathscr{C}_c(G)$ tel que $\operatorname{supp} F(r) \subseteq C$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. Soit

$$S_m = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m} F(\tfrac{r}{m}).$$

Il est possible de montrer que la suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{C}_c(G)$. La limite est alors notée comme une intégrale de Riemann :

$$\int_0^1 F(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m} F(\tfrac{r}{m}).$$

Nous utiliserons la linéarité de cette intégrale $\int(F+G) = \int F + \int G$, $\int \lambda F = \lambda \int F$.

Lemme 5.23 *Soient $X, Y \in \mathrm{L}$ et $Z = X + Y$. Soit encore $X_t = Y(-t)XY(t)$. Alors*

$$Z(1)f - Y(1)f = \int_0^1 Z(1-t)Y(t)D_{X_t}f\ \mathrm{d}t. \tag{15}$$

Démonstration. On montre d'abord que l'intégrale existe bien. Soit $F(t) = Z(1-t)Y(t)D_{X_t}f$ et soit $T \subseteq G$ compact tel que $\operatorname{supp} f \subseteq T$. Alors $\operatorname{supp} F(t) \subseteq Z([0,1])Y([0,1])T$ pour tout $t \in [0,1]$. De plus, comme l'ensemble des applications qui composent F sont continues :

$$t \mapsto Z(1-t)Y(t) \quad \text{(clairement continu)}; \qquad t \mapsto X_t \quad \text{(lemme 5.22)};$$
$$X_t \mapsto D_{X_t}f \quad (\text{car } X \mapsto D_X f \text{ est une application linéaire});$$
$$(Z(1-t)Y(t), D_{X_t}f) \mapsto Z(1-t)Y(t)D_{X_t}f \quad \text{(proposition 2.10)}.$$

Il s'ensuit que F est continue et donc l'intégrale (15) est bien définie. Soient $\alpha_m = Y(\frac{1}{m})X(\frac{1}{m})$ et $\beta_m = Y(\frac{1}{m})$. La suite $(\alpha_m^m f)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $Z(1)f$.

$$\begin{aligned}\left\{Y(\tfrac{1}{m})X(\tfrac{1}{m})\right\}^m f - Y(1)f &= \sum_{r=0}^{m-1} \alpha_m^{m-r}\beta^r f - \sum_{r=1}^{m} \alpha_m^{m-r}\beta^r f = \sum_{r=0}^{m-1} \alpha_m^{m-r}\beta^r f - \sum_{r=0}^{m-1} \alpha_m^{m-r}X(-\tfrac{1}{m})\beta^r f \\ &= \frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1} \alpha_m^{m-r}X(-\tfrac{1}{m})\beta^r \Big(m\left(X_{r/m}(\tfrac{1}{m})f - f\right)\Big) - \frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1}\gamma_r D_{X_{r/m}}f + \frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1}\gamma_r D_{X_{r/m}}f.\end{aligned}$$

En posant $\gamma_r = \alpha^{m-r}X(-\frac{1}{m})\beta^r$, on obtient :

$$\left\{Y(\tfrac{1}{m})X(\tfrac{1}{m})\right\}^m f - Y(1)f = \frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1}\gamma_r D_{X_{r/m}}f + \frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1}\gamma_r\Big(m\left(X_{r/m}(\tfrac{1}{m})f - f\right) - D_{X_{r/m}}f\Big).$$

Le membre de gauche de cette expression tends vers $Z(1)f - Y(1)f$. Soit $A_m + B_m$ le membre de droite. On montre que $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_G et que $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers le membre de droite de (15).

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ est compact dans L (lemme 5.22), le lemme 5.20 est applicable et il stipule qu'il existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\left\|m(X_{r/m}(\frac{1}{m})f - f) - D_{X_{r/m}}f\right\| < \varepsilon$ pour tout $m \geq m_1$ et tout $0 \leq r \leq m-1$. Il s'ensuit que $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_G.

Soit

$$A'_m = \sum_{r=0}^{m-1} Z(1-\tfrac{r}{m})Y(\tfrac{r}{m})D_{r/m}f.$$

Il faut montrer $\|A_m - A'_m\| < \varepsilon$ pour m assez grand. Soit $C_0 = \{Y(t)D_{X_t}f\}_{t\in[0,1]}$. Alors C_0 est compact pour les raisons citées plus haut. Par le lemme 5.17, il existe V un voisinage compact de l'identité tel que $\|ag - g\| < \varepsilon$ pour tout $a \in V$ et tout $g \in C_0$. Soit W un voisinage de l'identité avec $W^2 \subseteq V$. Comme $(\alpha_m, m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite standard convergente avec Z (lemme 5.1(a)), le lemme 5.21 s'applique (avec $R = 1$ et $1 - \frac{1}{r}$ à la place de r) et il stipule qu'il existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$Z\left(1-\tfrac{r}{m}\right)^{-1}\left(\alpha_m\right)^{[(1-\frac{r}{m})m]} = Z\left(1-\tfrac{r}{m}\right)^{-1}\alpha_m^{m-r} \in W \quad \text{pour tout } m \geq m_2 \text{ et tout } 0 \leq r \leq m.$$

Il existe $m_3 \in \mathbb{N}$ tel que $X(-\frac{1}{m}) \in W$ pour tout $m \geq m_3$. Donc

$$Z\left(1-\tfrac{r}{m}\right)^{-1}\alpha_m^{m-r}X(-\tfrac{1}{m}) \in W^2 \subseteq V \quad \text{pour tout } m \geq \max\{m_2, m_3\} \text{ et tout } 0 \leq r \leq m.$$

Soient r et m de tels entiers. Alors pour tout $g \in C_0$, on a

$$\left\|Z\left(1-\tfrac{r}{m}\right)^{-1}\alpha_m^{m-r}X(-\tfrac{1}{m})g - g\right\| = \left\|\alpha_m^{m-r}X(-\tfrac{1}{m})g - Z\left(1-\tfrac{r}{m}\right)g\right\| < \varepsilon.$$

En particulier, pour $g = Y(\frac{r}{m})D_{X_{r/m}}f \in C_0$,

$$\begin{aligned}\left\|\alpha_m^{m-r}X(-\tfrac{1}{m})Y(\tfrac{r}{m})D_{X_{r/m}}f - Z\left(1-\tfrac{r}{m}\right)Y(\tfrac{r}{m})D_{X_{r/m}}f\right\| \\ = \left\|\gamma_r D_{X_{r/m}}f - Z\left(1-\tfrac{r}{m}\right)Y(\tfrac{r}{m})D_{X_{r/m}}f\right\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

En sommant sur $r = 0, \ldots, m-1$ puis en divisant par m, on obtient $\|A_m - A'_m\| < \varepsilon$. □

Lemme 5.24 *Soit V un voisinage symétrique de l'identité dans G. Alors il existe W un voisinage de $\mathbf{0}$ dans* L *tel que*

$$X(t) \in V \quad \textit{pour tout } |t| \leq 1 \textit{ et tout } X \in W.$$

Démonstration. Comme K_1 est compact (lemme 5.18, page 34), le lemme 5.19 stipule qu'il existe un réel $r > 0$ associé à V et r tel que $X(t) \in V$ pour tout $|t| \leq r$ et tout $X \in K_1$. Soit $W = rK_1$. Alors W est un voisinage compact de $\mathbf{0}$ et pour tout $rX \in W$ $(X \in K_1)$ et tout $|s| \leq 1$, on a

$$rX(s) = X(rs) \in V \quad \text{car } rs \leq r.$$ □

Lemme 5.25 *Soient $X \in$ L, $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un suite de* L *convergente vers* $\mathbf{0}$ *et $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{N}$ croissante à l'infini. Soit $Z_i = Y_i + (1/N_i)X$. Alors $(Y_i(-1)Z_i(1), N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite standard. De plus, elle converge vers X.*

Démonstration. Par le lemme 5.16, il suffit de montrer que la suite $\big(N_i(Y_i(-1)Z_i(1)f - f)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers D_Xf. Soit $X'_i = (1/N_i)X$. Alors $Z_i = Y_i + X'_i$ et le lemme 5.23 montre que

$$Z_i(1)f - Y_i(1)f = \int_0^1 Z_i(1-t)Y_i(t)D_{X'_{i,t}}f \,\mathrm{d}t \quad \text{où } X'_{i,t} = Y_i(-t)X'_iY_i(t).$$

Or $X'_{i,t}(s) = Y_i(-t)X\left((1/N_i)(s)\right)Y_i(t) = (1/N_i)\left(Y_i(-t)XY_i(t)\right)(s) = (1/N_i)X_{i,t}(s)$. Donc

$$N_i\left(Y_i(-1)Z_i(1)f - f\right) = \int_0^1 Y_i(-1)Z_i(1-t)Y_i(t)D_{X_t}f \,\mathrm{d}t \quad \text{où } X_{i,t} = Y_i(-t)XY_i(t).$$

Nous allons montrer qu'il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $Y_i(-1)Z_i(1-t)Y_i(t)D_{X_{i,t}}f$ est arbitrairement proche de D_Xf dans $\mathscr{C}_c(G)$ pour tout $i \geq i_0$ et tout $0 \leq t \leq 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Vu que $X \mapsto D_Xf$ est continue, il existe W un voisinage de X dans L tel que

$$\|D_{X_1}f - D_Xf\| < \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour tout } X_1 \in W.$$

Comme l'application $a \mapsto a^{-1}Xa$ est continue de G dans L, il existe V un voisinage de l'identité tel que $a^{-1}Xa \in W$ pour tout $a \in V$. Par le lemme 5.24, il existe W_1 un voisinage de $\mathbf{0}$ dans L tel que $Y \in W_1$ implique $Y(t) \in V$ pour tout $0 \leq t \leq 1$. Par hypothèse sur $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $Y_i \in W_1$ pour tout $i \geq i_0$. Il s'ensuit que $Y_i(-t)XY_i(t) = X_{i,t} \in W$ pour tout $0 \leq t \leq 1$ et tout $i \geq i_0$.

Par continuité de la translation, il existe V_1 un voisinage de l'identité tel que $\|aD_Xf - D_Xf\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $a \in V_1$. Soit V_2 tel que $V_2^3 \subseteq V_1$. En appliquant le lemme 5.24 comme ci-dessus à V_2, on constate qu'il existe $i_2 \in \mathbb{N}$ tel que $Y_i(-1)Z_i(1-t)Y_i(t) \in V_2^3 \subseteq V_1$ pour tout $i \geq i_2$ et tout $0 \leq t \leq 1$. En posant $b_i(t) = Y_i(-1)Z_i(1-t)Y_i(t)$, on a

$$\begin{aligned}\|Y_i(-1)Z_i(1-t)Y_i(t)D_{X_{i,t}}f - D_Xf\| &= \|b_i(t)D_{X_{i,t}}f - b_i(t)D_Xf + b_i(t)D_Xf - D_Xf\| \\ &\leq \|b_i(t)D_{X_{i,t}}f - b_i(t)D_Xf\| + \|b_i(t)D_Xf - D_Xf\| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

pour tout $i \geq \max\{i_1, i_2\}$ et tout $0 \leq t \leq 1$. Donc finalement

$$\begin{aligned}\left\|N_i\left(Y_i(-1)Z_i(1)f - f\right) - D_X f\right\| &= \left\|\int_0^1 Y_i(-1)Z_i(1-t)Y_i(t)D_{X_{i,t}}f - D_X f \,\mathrm{d}t\right\| \\ &\leq \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1}\sup_{0\leq t\leq 1}\left\|Y_i(-1)Z_i(1-t)Y_i(t)D_{X_{i,t}}f - D_X f\right\| < \varepsilon. \quad \square\end{aligned}$$

5.3.4 K est un voisinage de l'identité

Définition 5.5 Pour tout $a \in G$, $a \neq e$, soit $N(a)$ l'unique entier $n \geq 0$ tel que $a, a^2, \ldots, a^n \in U$ et $a^{n+1} \notin U$; et soit $N(e) = \infty$.

Vu que U ne contient aucun sous-groupe, il est impossible que $a^n \in U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sauf si $a = e$. L'application $N : G \setminus \{e\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ est donc bien définie. En particulier, $N(a) = 0$ pour $a \notin U$ et $N(a) > 0$ pour $a \in U$.

Lemme 5.26 *Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de G convergente. Alors $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers l'identité si et seulement si $(N(a_i))_{i\in\mathbb{N}}$ croît vers l'infini.*

Démonstration. Nous rappelons que les ensembles $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ forment une base de voisinage de l'identité (proposition 4.15 page 25). Supposons que $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers e. Soit $M > 0$ et soit $N \geq M$ un entier. Il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_i \in Q_N$ pour tout $i \geq i_0$ et donc, par définition des Q_j, $a_i, a_i^2, \ldots, a_i^N \in U$ pour tout $i \geq i_0$. Donc $N(a_i) \geq N \geq M$ pour $i \geq i_0$, montrant que la suite $(N(a_i))_{i\in\mathbb{N}}$ croît vers l'infini.

Réciproquement, supposons que $(N(a_i))_{i\in\mathbb{N}}$ croît vers l'infini. Soit V un voisinage de l'identité. Il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $Q_{j_0} \subseteq V$. Par hypothèse, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N(a_i) \geq j_0$ pour tout $i \geq i_0$. Mais $N(a_i) \geq j_0$ implique $a_i, \ldots, a_i^{j_0} \in U$ et donc $a_i \in Q_{j_0} \subseteq V$ pour tout $i \geq i_0$, montrant que $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers l'identité. $\square$

Lemme 5.27 *K est un voisinage de l'identité.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que K n'est pas un voisinage de l'identité. Alors il existe $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $G \setminus K$ convergente vers e. Pour $i \in \mathbb{N}$, il existe $Y_i \in K_1$ un élément qui maximise la quantité $N(Y_i(-1)a_i)$. Si un tel Y_i n'existait pas, pour chaque i fixé, il existerait une suite de Y_j tel que $\big(N(Y_j(-1)a_i))\big)_{j\in\mathbb{N}}$ soit croîssante vers l'infini. Par le lemme précédent, une sous-suite de $(Y_j(-1))_{j\in\mathbb{N}}$ convergerait vers a_i. Or, dans ce cas a_i serait la limite d'une suite d'éléments de K (car $Y_j(-1) \in K$) et K étant fermé, cela impliquerait $a_i \in K$: contradiction.

Soit donc $Y_i \in K_1$ tel que $N_i = N(Y_i(-1)a_i)$ est maximal et soit $x_i = Y_i(-1)a_i$. Vu que $N(x_i) \geq N(a_i)$ et que $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers e, il suit du lemme précédant que $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ croît vers l'infini et donc également que $(Y_i(-1))_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers e. Alors

$$\lim_{i\in\mathbb{N}} Y_i(1)^{-1} = e = \mathbf{0}(1),$$

Donc $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{0}$. Ensuite, par définition des N_i, on a que $x_i \ldots, x_i^{N_i-1} \in U$ et donc, quite à ignorer les premiers termes, la suite $(x_i, N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est standard. Elle admet donc une sous-suite $(x_i, N_i)_{i\in I}$ convergente vers un élément $X \in \mathrm{L}$. Soit $Z_i = Y_i + X/N_i$. Alors $(Z_i)_{i\in I}$ tends vers $\mathbf{0}$ et donc $Z_i \in K_1$ pour i suffisament grand car K_1 est un voisinage de $\mathbf{0}$. Soit $p_i = Y_i(-1)Z_i(1)$. Par le lemme 5.25, $(p_i, N_i)_{i\in I}$ converge vers X.

Soit $q_i = p_i^{-1}x_i$. Alors $(q_i, N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite standard convergente vers $-X + X = \mathbf{0}$ d'après le lemme 5.14. Mais les éléments q_i sont de la forme

$$q_i = p_i^{-1}x_i = (Y_i(-1)Z_i(1))^{-1}Y_i(-1)a_i = Z_i(-1)Y(1)Y_i(-1)a_i = Z_i(-1)a_i.$$

Donc, d'après le lemme 5.21, il existe un entier $i_0 \in I$ associé à $R = 2$ (par exemple) et $V = U$ tel que $q_i^{[rN_i]} \in U$ pour tout $i \in I$ avec $i \geq i_0$ et tout $0 \leq r \leq 2$ et en particulier,

$$q_i, q_i^2, \ldots, q_i^{[2N_i]} \in U.$$

Ceci contredit la maximalité des N_i car on a trouvé $Z_i \in K_1$ avec $N(Z_i(-1)a_i) > N_i$. $\square$

Lemme 5.28 *L'application $E_1^{-1} : K \to K_1$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Soit $\delta : \mathrm{L} \to M$ la fonction auxiliaire définie par $\delta(X) \mapsto D_X f$. C'est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension (finie). De plus, elle est injective (lemme 5.4). C'est donc un isomorphisme topologique, autrement dit un isomorphisme d'espace vectoriel et un homéomorphisme. Soit $\delta_1 : K_1 \to \delta(K_1)$ sa restriction à K_1. Alors $\delta_1^{-1} : \delta(K_1) \to K_1$ est continue.

Soit $\gamma : K \to M$ définie par $\gamma(x) = D_{E_1^{-1}x} f$; γ est continue par le lemme 5.11. Mais

$$\delta_1^{-1}(\gamma(x)) = \delta_1^{-1}(D_{E_1^{-1}x} f) = E_1^{-1}(x), \quad \text{donc } E_1^{-1} = \delta_1^{-1} \circ \gamma.$$

Ainsi E_1^{-1} est continue. Puisque E_1^{-1} est une bijection, il ne reste plus qu'à montrer que c'est une application ouverte, ou de manière équivalente, que si $F \subseteq K$ est fermé, alors $E_1^{-1}(F)$ est fermé. Soit $F \subseteq K$ un fermé. Mais K est fermé dans G (lemme 5.9) et contenu dans le compact U, donc K est compact. Puisque F est fermé dans K, F est compact. Puisque E_1^{-1} est continue, $E_1^{-1}(F)$ est compact dans K_1. Enfin, puisque K_1 est séparé (c'est un sous-espace d'un espace euclidien), $E_1^{-1}(F)$ est fermé dans K_1. Ceci montre que E_1^{-1} est un homéomorphisme. $\square$

Théorème 5.29 *Soit G un groupe localement compact* NSS *non discret. Alors G est localement euclidien.*

Démonstration. On reprend les mêmes notations du lemme précédent. Par le lemme 5.27, K est un voisinage de l'identité. Soit $V \subseteq K$ un voisinage ouvert. Par le lemme précédent, $\delta_1 \circ E_1^{-1}$ est un homéomorphisme de V sur son image et $\delta_1(E_1^{-1}(V)) \subseteq M$ est un ouvert dans un espace euclidien. Ainsi, V est homéomorphe à une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, montrant que G est localement euclidien. $\square$

A Compléments

A.1 Les groupes de Lie ne possèdent pas de petits sous-groupes

Soit G un groupe de Lie. On rappel que l'application exponentielle $\exp : T_eG \to G,\ \exp(X) = X(1)$ est un difféomorphisme local.

Théorème A.1 ([5], prop. 2.17) *Les groupes de Lie sont des groupes* NSS.

Démonstration. Supposons par l'absurde que tout voisinage de l'identité admet un sous-groupe non-trivial. Soit $B \subseteq T_eG$ un voisinage ouvert convexe de $\mathbf{0}$ tel que l'exponentielle restreinte à B est un homéomorphisme de B dans un voisinage ouvert de l'identité $V \subseteq G$. On restreint l'exp à $\frac{1}{2}B$. Soit $U = \exp(\frac{1}{2}B)$. Par hypothèse absurde, il existe $H \subseteq U$ un sous-groupe non-trivial. Soit $x \in H$ avec $x \neq e$. Il existe un unique $\xi \in \frac{1}{2}N$ avec $\exp(\xi) = x$. Nécessairement, $\xi \neq \mathbf{0}$, donc il existe un entier n avec $n\xi \notin \frac{1}{2}B$, d'où la contradiction suivante : $x^n = \exp(n\xi) \in H \cap (V \setminus U) = \emptyset$. □

A.2 Les espaces normés localement compacts sont de dimension finie

Cette partie du texte est basée sur [7, chap. 2.5]. Les espaces vectoriels considérés sont sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème A.2 *Soit* $(N, \|\ \|)$ *un espace vectoriel normé localement compact. Alors N est de dimension finie.*

La démonstration de ce théorème est basée sur le lemme suivant ainsi que quelques faits non-démontrés ici.

– Dans un espace vectoriel normé, les sous-espaces de dimension finie sont fermés.
– Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les sous-ensembles bornés et fermés sont compacts.
– Dans un espace vectoriel normé, les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire sont des applications continues.

Lemme A.3 (F. Riesz) *Soit* N *un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et soient Y et Z des sous-espaces* $\neq \{0\}$. *Si Y est fermé dans* N *et si $Y \subseteq Z$ avec $Y \neq Z$, alors il existe $z \in Z \setminus Y$ tel que*

$$\|z\| = 1 \quad et \quad \inf_{y \in Y} \|z - y\| \geq \frac{1}{2}.$$

Démonstration. Soient $v \in Z \setminus Y$ et $a = \inf_{y \in Y} \|v - y\|$. Alors $a > 0$ car Y est fermé. Par définition de l'infimum, il existe $y_0 \in Y$ avec $a \leq \|v - y_0\| \leq 2a$. Soient $c = (\|v - y_0\|)^{-1}$ et $z = c(z - y_0)$. Alors $\|z\| = 1$ et

$$\|z - y\| = \|c(v - y_0) - y\| = c\,\|v - y_0 - c^{-1}y\| = c\,\|v - y_1\| \quad \text{où } y_1 = y_0 - c^{-1}y \in Y$$

car Y est un sous-espace. Ainsi

$$\|z - y\| = c\,\|v - y_1\| \geq ca = \frac{a}{\|v - y_0\|} \geq a\frac{1}{2a} = \frac{1}{2} \quad \text{car} \quad \frac{1}{\|v - y_0\|} \geq \frac{1}{a}.$$

On obtient le résultat en passant à l'infimum. □

Théorème A.4 (de compacité) *Soient* $(\mathrm{N}, \|\ \|)$ *un espace vectoriel normé et* $B = \{x \in \mathrm{N} \mid \|x\| \leq 1\}$. *Alors B est compact si et seulement si* N *est de dimension finie.*

Démonstration. Si N est de dimension finie, B est compact vu que B est borné et fermé. Réciproquement, supposons par l'absurde à la fois que B est compact et que $\dim \mathrm{N} = +\infty$. Soit $x_1 \in B$ et X_1 le sous-espace engendré par x_1; X_1 est fermé dans N. Par le lemme de Riesz, il existe $x_2 \in B$ un vecteur linéairement indépendant de x_1 avec $\inf_{y \in X_1} \|y - x_2\| \geq \frac{1}{2}$. Soit X_2 le sous-espace engendré par $\{x_1, x_2\}$; X_2 est fermé dans B. Par le lemme de Riesz, il existe $x_3 \in B$ un vecteur linéairement indépendant de $\{x_1, x_2\}$ avec $\inf_{y \in X_2} \|y - x_3\| \geq \frac{1}{2}$. Etc.

Ce procédé détermine l'existence d'une suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de B qui n'admet aucune sous-suite convergente puisque

$$\|x_i - x_j\| \geq \tfrac{1}{2} \quad \text{pour tout } i, j \in \mathbb{N}.$$

Ceci contredit la compacité de B. □

Démonstration du théorème A.2. Soit V un voisinage compact de 0 dans N. Les boules fermées $\{B_0(r) \mid r > 0\}$ forment une base de voisinages fermés de 0 dans N. Il existe donc $r > 0$ avec $B_0(r) \subseteq V$. Puisque V est compact et $B_0(r)$ fermé dans N, il s'ensuit que $B_0(r)$ est compact. Puisque l'application $\lambda : x \mapsto \frac{1}{r}x$ est continue sur N, $\lambda(B_0(r)) = B_0(1)$ est compact. D'après le théorème de compacité, N est de dimension finie. □

B Références

[1] A. Connes – « Le mystère est motivant », *Sciences et avenir* **52** (2005), p. 57.

[2] A. M. Gleason – « Groups without small subgroups », *Ann. of Math. (2)* **56** (1952), p. 193–212.

[3] E. Hewitt et K. A. Ross – *Abstract harmonic analysis. Vol. I*, second éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 115, Springer-Verlag, Berlin, 1979, Structure of topological groups, integration theory, group representations.

[4] D. Hilbert – *Sur les problèmes futurs des mathématiques*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics], Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1990, Les 23 problèmes. [The 23 problems], Translated from the 1900 German original by M. L. Laugel and revised by the author, Reprint of the 1902 French translation.

[5] K. H. Hofmann et S. A. Morris – *The Lie theory of connected pro-Lie groups*, EMS Tracts in Mathematics, vol. 2, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2007, A structure theory for pro-Lie algebras, pro-Lie groups, and connected locally compact groups.

[6] I. Kaplansky – *Lie algebras and locally compact groups*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1995, Reprint of the 1974 edition.

[7] E. Kreyszig – *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1978.

[8] D. Montgomery et L. Zippin – « Small subgroups of finite-dimensional groups », *Ann. of Math. (2)* **56** (1952), p. 213–241.

[9] S. A. Morris et H. B. Thompson – « Free topological groups with no small subgroups », *Proc. Amer. Math. Soc.* **46** (1974), p. 431–437.

[10] J. R. Munkres – *Topology: a first course*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[11] R. S. Palais – « Gleason's contribution to the solution of hilbert's fifth problem », *Notices of the AMS* **56** (2009), p. 1243–1247.